Faisceaux sans torsion et faisceaux quasi localement libres sur les courbes multiples primitives

Jean-Marc Drézet

FAISCEAUX SANS TORSION ET FAISCEAUX QUASI LOCALEMENT LIBRES SUR LES COURBES MULTIPLES PRIMITIVES

JEAN–MARC DRÉZET

Résumé. This paper is devoted to the study of some coherent sheaves on non reduced curves that can be locally embedded in smooth surfaces. If Y is such a curve and n is its multiplicity, then there is a filtration $C_1 = C \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = Y$ such that C is the reduced curve associated to Y, and for every $P \in C$, if $z \in \mathcal{O}_{Y,P}$ is an equation of C then (z^i) is the ideal of C_i in $\mathcal{O}_{Y,P}$. A coherent sheaf on Y is called *torsion free* if it does not have any non zero subsheaf with finite support. We prove that torsion free sheaves are reflexive. We study then the *quasi locally free sheaves*, i.e. sheaves which are locally isomorphic to direct sums of the $\mathcal{O}_{C_i}$. We define an invariant for these sheaves, the *complete type*, and prove the irreducibility of the set of sheaves of given complete type. We study the generic quasi locally free sheaves, with applications to the moduli spaces of stable sheaves on Y.

Sommaire

1.	Introduction	1
2.	Préliminaires	7
3.	Propriétés élémentaires des faisceaux cohérents sur les courbes multiples primitives	11
4.	Faisceaux réflexifs	20
5.	Résolutions périodiques des faisceaux quasi localement libres	24
6.	Familles de faisceaux quasi localement libres	30
	Références	43

1. Introduction

Une *courbe multiple primitive* est une variété algébrique complexe de Cohen-Macaulay pouvant localement être plongée dans une surface lisse, et dont la sous-variété réduite associée est une courbe lisse. Les courbes projectives multiples primitives ont été définies et étudiées pour la première fois par C. Bănică et O. Forster dans [1]. Leur classification a été faite dans [2] pour les courbes doubles, et dans [8] dans le cas général.

L'article [7] donne les premières propriétés des faisceaux cohérents et de leurs variétés de modules sur les courbes multiples primitives. Cette étude est poursuivie ici. En particulier la plupart des résultats de [7] concernant les faisceaux sur les courbes doubles sont généralisés ici en multiplicité quelconque.

Les faisceaux semi-stables sur des variétés non lisses ont déjà été étudiés :

– sur des courbes réduites dans [25], [3], [4], [30], [31], [32].
– sur des variétés non réduites semblables à celles qui sont considérées ici dans[17].
– sur une variété ayant deux composantes irréductibles qui se coupent dans [18].

On peut espérer en trouver des applications concernant les fibrés vectoriels ou leurs variétés de modules sur les courbes lisses (cf. [11], [28], [29]) en faisant dégénérer des courbes lisses vers une courbe multiple primitive. Le problème de la dégénération des courbes lisses en courbes primitives doubles est évoqué dans [13].

Les faisceaux cohérents sur les courbes non réduites apparaissent aussi lorsqu'on veut étudier les faisceaux de dimension 1 sur les surfaces, lesquels interviennent notamment dans la conjecture de "dualité étrange" de J. Le Potier (cf. [5]). Les faisceaux sur des courbes non réduites apparaissent (cf. [20], [21]) comme limites de fibrés vectoriels sur des courbes lisses. Leur rôle est sans doute encore plus important si on cherche à obtenir d'autres variétés de modules fins de faisceaux de dimension 1 que les classiques variétés de modules de faisceaux semi-stables (cf. [6]).

Notations : Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont des faisceaux cohérents sur une variété algébrique, on désigne par $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathrm{End}(\mathcal{E})$) les Ext (resp. morphismes) globaux de faisceaux et par $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$) les faisceaux d'Ext locaux (resp. de morphismes).

1.1. Faisceaux sans torsion

Soit Y une courbe multiple primitive. Un faisceau cohérent sur Y est dit *sans torsion* s'il n'a pas de sous-faisceau non nul de support fini. Les faisceaux semi-stables sur Y non concentrés en un nombre fini de points sont des exemples de faisceaux sans torsion. On démontre en 4.2.2 le

Théorème A : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur Y. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\mathcal{E}$ est réflexif.*
(ii) *$\mathcal{E}$ est sans torsion.*
(iii) *On a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{O}_Y)=0$.*

Si les conditions précédentes sont réalisées on a de plus $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{O}_Y)=0$ pour tout $i\geq 1$.

Ce résultat avait été démontré pour les courbes doubles dans [7]. Ceci implique en particulier qu'en dualisant une suite exacte de faisceaux sans torsion sur C_n on obtient une suite exacte. Une autre application est le *théorème de dualité de Serre* sur Y, qui est vrai pour les faisceaux sans torsion : si $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur Y, alors on a des isomorphismes fonctoriels

$$H^i(Y,\mathcal{F}) \ \simeq \ H^{1-i}(Y,\mathcal{F}^\vee\otimes\omega_Y)^*$$

pour $i = 0, 1$.

1.2. Faisceaux quasi localement libres

Soit Y une courbe multiple primitive de courbe réduite associée C projective et de multiplicité n. Soient $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C, et pour $1 \leq i \leq n$, C_i le sous-schéma de Y défini par $\mathcal{I}_C^i$. On a donc $C_n = Y$ et C_i est une courbe multiple primitive de multiplicité i. On note $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$, qui est un fibré en droites sur C.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y on note $\mathcal{F}_i$ le noyau de la restriction $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|C_i}$. Les quotients $G_i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$, $0 \leq i < n$, sont des faisceaux sur C. Ils permettent de définir les *rang généralisé* et le *degré généralisé* de $\mathcal{F}$:

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{rg}(G_i(\mathcal{F})), \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n-1} \deg(G_i(\mathcal{F}))$$

(cf. 3.2, [7])

Un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur Y est dit *quasi localement libre* s'il est localement isomorphe à une somme directe du type

$$\bigoplus_{i=1}^{n} m_i \mathcal{O}_{C_i} \ .$$

La suite $(m_1, \ldots, m_n)$ s'appelle le *type* de $\mathcal{E}$. D'après [7] pour que $\mathcal{E}$ soit quasi localement libre il faut et il suffit que tous les $G_i(\mathcal{E})$ soient localement libres sur C. La paire

$$\big((\mathrm{rg}(G_0(\mathcal{E})), \ldots, \mathrm{rg}(G_{n-1}(\mathcal{E}))\ ,\ (\deg(G_0(\mathcal{E})), \ldots, \deg(G_{n-1}(\mathcal{E}))\big)$$

s'appelle le *type complet* de $\mathcal{E}$.

1.2.1. *Invariance du type complet par déformation* - Soient $m_1, \ldots, m_n \geq 0$ des entiers, Y une variété algébrique intègre et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $Y \times C_n$, plat sur Y. On suppose que pour tout point fermé $y \in Y$, $\mathcal{F}_y$ est quasi localement libre de type $(m_1, \ldots, m_n)$. Soit $p_{C_n} : Y \times C_n \to C_n$ la projection. On démontre en 6.1.5 le

Théorème B : *Pour tout point fermé $(y, P) \in Y \times C_n$ il existe un voisinage U de (y, P) tel que*

$$\mathcal{F}_{|U} \ \simeq \ \bigoplus_{i=1}^{n} m_i . p_{C_n}^*(\mathcal{O}_{C_i})_{|U} .$$

Il en découle que le noyau $\mathcal{F}_i$ de la restriction $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{|Y \times C_i}$ est plat sur Y et que pour tout $y \in Y$ on a $(\mathcal{F}_i)_y = (\mathcal{F}_y)_i$. On en déduit aisément que le type complet de $\mathcal{F}_y$ est indépendant de $y \in Y$.

1.2.2. *Irréductibilité* - Soient X une variété algébrique, et $\mathcal{Y}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X. On dit que $\mathcal{Y}$ est *irréductible* si pour tous $E_0, E_1 \in \mathcal{Y}$ il existe une variété irréductible Z, un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur $Z \times X$ plat sur Z, tel que pour tout point fermé $z \in Z$ on ait $\mathcal{E}_z \in \mathcal{Y}$, et qu'il existe des points fermés $z_0, z_1 \in Z$ tels que $\mathcal{E}_{z_0} = E_0$, $\mathcal{E}_{z_1} = E_1$. Il est bien connu par exemple que les fibrés vectoriels de rang et degré donnés sur C constituent un ensemble irréductible. On démontre en 6.2.1 le

Théorème C : *Les faisceaux quasi localement libres sur C_n de type complet donné constituent un ensemble irréductible.*

1.2.3. *Faisceaux quasi localement libres de type rigide* - Un faisceau quasi localement libre est dit *de type rigide* s'il est localement libre, ou localement isomorphe à $a\mathcal{O}_{C_n} \oplus \mathcal{O}_{C_k}$, avec $1 \leq k < n$. On démontre en 6.3.1 la

Proposition D : *Soient Y une variété algébrique intègre et $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par Y. Alors l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\mathcal{E}_y$ soit quasi localement libre de type rigide est un ouvert de Y.*

Les faisceaux quasi localement libres de type rigide sont donc des faisceaux génériques.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Soit $(\widetilde{\mathcal{E}}, S, s_0, \epsilon)$ une *déformation semi-universelle* de $\mathcal{E}$ (cf. [27], [9] 3.1), donc $\widetilde{\mathcal{E}}$ est une famille plate de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par S, s_0 est un point fermé de S et $\epsilon : \widetilde{\mathcal{E}}_{s_0} \simeq \mathcal{E}$. Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_{\widetilde{\mathcal{E}},s_0} : T_{s_0}S \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

est un isomorphisme. On pose

$$D_{reg}(\mathcal{E}) \ = \ \omega_{\widetilde{\mathcal{E}},s_0}(T_{s_0}(S_{red})).$$

Pour toute déformation de $\mathcal{E}$ paramétrée par une variété réduite, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer correspondant est à valeurs dans $D_{reg}(\mathcal{E})$.

On dit que $\mathcal{E}$ est *lisse* si S est lisse en s_0. Les faisceaux localement libres sont lisses mais ce n'est pas le cas en général des autres faisceaux quasi localement libres de type rigide.

On dit que $\mathcal{E}$ est *lisse pour les déformations réduites* si S_{red} est lisse en s_0.

On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \longrightarrow 0.$$

On démontre en 6.3.3 le

Théorème E : *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre de type rigide générique, alors on a $D_{reg}(\mathcal{E}) = H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$.*

d'où on déduit le

Corollaire F : *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre de type rigide tel que* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{E}))$ *soit minimal, c'est à-dire soit tel que pour tout faisceau quasi localement libre $\mathcal{F}$ de même type complet que $\mathcal{E}$ on ait* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{F})) \geq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{E}))$, *alors on a* $D_{reg}(\mathcal{E}) = H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$ *, et $\mathcal{E}$ est lisse pour les déformations réduites.*

1.2.4. *Composantes des variétés de modules de faisceaux sans torsion stables* - Soient R, D des entiers, avec $R \geq 1$. Soit $\mathcal{M}(R, D)$ la variété de modules des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé D sur C_n (cf. [22], [23], [26]). On supposera que $\deg(L) < 0$, car dans le cas contraire les seuls faisceaux sans torsion stables sur C_n sont les fibrés vectoriels stables sur C.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$. Posons

$$E = \mathcal{E}_{|C}, \quad F = G_k(\mathcal{E}) \otimes L^{-k}, \quad \delta(\mathcal{E}) = \deg(F), \quad \epsilon(\mathcal{E}) = \deg(E).$$

On a

$$R(\mathcal{E}) = an + k, \quad \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = k\epsilon(\mathcal{E}) + (n-k)\delta(\mathcal{E}) + \big(n(n-1)a + k(k-1)\big)\deg(L)/2 \ .$$

D'après 1.2.3 les déformations de $\mathcal{E}$ sont des faisceaux quasi localement libres de type rigide, et $a(\mathcal{E})$, $k(\mathcal{E})$, $\delta(\mathcal{E})$ et $\epsilon(\mathcal{E})$ sont aussi invariants par déformation.

Soient $R = R(\mathcal{E}), D = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}), \delta = \delta(\mathcal{E}), \epsilon = \epsilon(\mathcal{E})$. Les faisceaux quasi localement libres de type rigide stables $\mathcal{F}$ tels que $a(\mathcal{F}) = a$, $k(\mathcal{F}) = k$, $\delta(\mathcal{F}) = \delta$, $\epsilon(\mathcal{F}) = \epsilon$ constituent donc un ouvert de $\mathcal{M}(R, D)$, noté $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)$.

Proposition G : *La variété $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)$ est irréductible, et la sous-variété réduite sous-jacente $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$ est lisse. Si cette variété est non vide, on a*

$$\dim(\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)) \ = \ 1 - \big(\frac{n(n-1)}{2}a^2 + k(n-1)a + \frac{k(k-1)}{2}\big)\deg(L) + (g-1)(na^2 + k(2a+1))$$

(g désignant le genre de C). Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$, l'espace tangent de $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$ en $\mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}))$.

Les paramètres a, k, δ, ϵ tels que $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)$ soit non vide ne sont pas encore connus. Des exemples pour $a = 1$, $k = 1$ sur une courbe double sont donnés dans [7].

1.3. Questions

1.3.1. *Composantes irréductibles* - Soit $\mathcal{K}(R, D)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux sans torsion de rang généralisé R et de degré généralisé D sur C_n. Il serait intéressant de décomposer $\mathcal{K}(R, D)$ en sous-ensembles irréductibles et de paramétrer ces "composantes".

On a décrit dans le présent article celles qui contiennent des faisceaux quasi localement libres de type rigide. Mais pour certaines valeurs de R et D de telles composantes n'existent pas. Supposons par exemple que R soit multiple de n : $R = an$. Si $\mathcal{E}$ est quasi localement libre de type rigide et de rang généralisé R, alors $\mathcal{E}$ est localement libre et on a

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \ = \ n.\deg(\mathcal{E}_{|C}) + \frac{n(n-1)}{2} a \deg(L),$$

Donc si $D \not\equiv \frac{n(n-1)}{2} a \deg(L) \pmod{n}$ il n'existe pas de faisceau quasi localement libre de type rigide de rang R et de degré généralisé D. Les faisceaux génériques semblent être dans de cas des faisceaux localement isomorphes à $a\mathcal{O}_{C_n}$ sur un ouvert non vide de C_n, mais avec un certain nombre de points singuliers.

1.3.2. *Conditions d'existence des faisceaux stables* - Quels sont les entiers R, D tels qu'il existe un faisceau stable de rang R et de degré D sur C_n ? On doit supposer que $\deg(L) < 0$, sans quoi il n'existe aucun faisceau stable en dehors des fibrés vectoriels stables sur C. Autre question analogue : Quels sont les entiers R, D tels qu'il existe un faisceau simple de rang R et de degré D sur C_n ?

1.4. Plan des chapitres suivants

Le chapitre 2 contient des résultats techniques utilisés dans les autres chapitres.

Dans le chapitre 3 on rappelle en les approfondissant certaines propriétés des faisceaux cohérents sur les courbes multiples primitives. En particulier on étudie des méthodes de construction de faisceaux cohérents sur C_n qui sont utilisées dans les chapitres suivants. Par exemple on donne la construction des faisceaux $\mathcal{E}$ connaissant $\mathcal{E}_{|C}$ et le noyau de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_{|C}$. Ces méthodes sont utilisées dans des démonstrations par récurrence sur la multiplicité n.

Le chapitre 4 traite des faisceaux réflexifs. Les résultats les plus importants démontrés ici sont le théorème A et la dualité de Serre pour les faisceaux sans torsion.

Le chapitre 5 contient un résulat technique indispensable aux démonstrations du chapitre 6 : si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre, alors il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n et un morphisme surjectif $\mathbb{E} \to \mathcal{E}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{E}_{|C} \simeq \mathcal{E}_{|C}$. On en déduit l'existence de curieuses résolutions localement libres des faisceaux quasi localement libres (les *résolutions périodiques*), qui permettent de mettre en évidence une classe canonique

$$\lambda_{\mathcal{E}} \ \in \ \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{C_n}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

associée à tout faisceau quasi localement libre $\mathcal{E}$ sur C_n, qui est nulle si et seulement si $\mathcal{E}$ est localement libre.

Le chapitre 6 contient les démonstrations de résultats énoncés en 1.2.

2. Préliminaires

2.1. Définitions des courbes multiples primitives et notations

Une *courbe primitive* est une variété Y de Cohen-Macaulay telle que la sous-variété réduite associée $C = Y_{red}$ soit une courbe lisse irréductible, et que tout point fermé de Y possède un voisinage pouvant être plongé dans une surface lisse.

Soient P un point fermé de Y, et U un voisinage de P pouvant être plongé dans une surface lisse S. Soit z un élément de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,P}$ de S en P engendrant l'idéal de C dans cet anneau. Il existe alors un unique entier n, indépendant de P, tel que l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_{S,P}$ soit engendré par (z^n). Cet entier n s'appelle la *multiplicité* de Y. Si $n = 2$ on dit que Y est une *courbe double*. D'après [8], théorème 5.2.1, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,P}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{CP} \otimes (\mathbb{C}[t]/(t^n))$.

Soit $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de C dans Y. Alors le faisceau conormal de C, $L = \mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2$ est un fibré en droites sur C, dit *associé* à Y. Il existe une filtration canonique

$$C = C_1 \subset \cdots \subset C_n = Y \ ,$$

où au voisinage de chaque point P l'idéal de C_i dans $\mathcal{O}_{S,P}$ est (z^i). On notera $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{C_i}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Le faisceau $\mathcal{I}_C$ est un fibré en droites sur C_{n-1}. Il existe d'après [7], théorème 3.1.1, un fibré en droites $\mathbb{L}$ sur C_n dont la restriction à C_{n-1} est $\mathcal{I}_C$. On a alors, pour tout faisceau de $\mathcal{O}_n$-modules $\mathcal{E}$ un morphisme canonique

$$\mathcal{E} \otimes \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui en chaque point fermé P de C est la multiplication par z.

Pour tout point fermé P de C, on notera $z_P \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation de C et $x_P \in \mathcal{O}_{nP}$ un élément au dessus d'un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{CP}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on notera z, x au lieu de z_P, x_P respectivement.

Soient X, Y, T des variétés algébriques. On note p_X, p_Y les projections $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$.

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $Y \times T$ et si $f : X \to Y$ est un morphisme, on notera $f^\sharp(\mathcal{E}) = (f \times I_T)^*(\mathcal{E})$.

2.2. Fibré canonique

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n de courbe réduite associée C. On suppose que C est projective, il en est donc de même de C_n. Étant localement intersection complète, C_n admet un *faisceau dualisant* ω_{C_n}, qui est un fibré en droites sur C_n. On peut le définir à partir d'un plongement de C_n dans une variété projective lisse X :

$$\omega_{C_n} \ \simeq \ \omega_X \otimes \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*,$$

$\mathcal{I}$ désignant le faisceau d'idéaux de C_n dans X (on peut voir $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ comme un fibré vectoriel de rang $\dim(X) - 1$ sur C_n).

2.3. Les Ext de faisceaux définis sur des sous-variétés

Soient X une variété projective et $Y \subset X$ une sous-variété fermée. Si $j : Y \to X$ est l'inclusion et E un faisceau cohérent sur Y, on notera aussi souvent E le faisceau $j_*(E)$ sur X.

2.3.1. Proposition : *Soient E, F des faisceaux cohérents sur Y.*

1 - On a une suite exacte fonctorielle canonique

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(F,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F,\mathcal{O}_Y),E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_Y}(F,E).$$

2 - On a une suite exacte fonctorielle canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(F,E) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(F,E) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_X}(F,\mathcal{O}_Y),E) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_Y}(F,E).$$

Démonstration. La première assertion est la proposition 2.2.1 de [7], et la seconde se démontre de manière analogue. □

2.4. Extensions

Soient X une variété algébrique et E, F des faisceaux cohérents sur X. Une *extension* de F par E est une suite exacte de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$. Il est bien connu que les classes d'isomorphisme d'extensions sont paramétrées par $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$. On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(F,E)) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E) \xrightarrow{p} H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)) \longrightarrow 0,$$

d'après la suite spectrale des Ext (cf. [12], 7.3). Le morphisme p est facile à décrire : soient $x \in X$, $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ et $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$ l'extension associée. Alors $p(\sigma)(x)$ est l'élément de $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{Xx}}(F_x,E_x)$ associé à la suite exacte $0 \to E_x \to \mathcal{E}_x \to F_x \to 0$. Les extensions associées aux éléments de $\mathrm{im}(\pi)$ sont donc celles qui sont triviales en chaque point de X. Pour les décrire plus précisément on va rappeler une construction explicite des extensions.

2.4.1. *Construction des extensions* - Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X. Si $m_0 \gg 0$, il existe un entier $k_0 > 0$ et un morphisme surjectif

$$f_0 : \mathcal{O}_X(-m_0) \otimes \mathbb{C}^{k_0} \longrightarrow F.$$

Si $m_1 \gg 0$ il existe de même un entier $k_1 > 0$ et un morphisme surjectif

$$f_1 : \mathcal{O}_X(-m_1) \otimes \mathbb{C}^{k_1} \longrightarrow \ker(f_0).$$

On obtient en poursuivant ainsi une résolution localement libre de F :

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} F \ ,$$

avec $F_i = \mathcal{O}_X(-m_i) \otimes \mathbb{C}^{k_i}$. Soit $\phi_i : \mathrm{Hom}(F_{i-1},E) \to \mathrm{Hom}(F_i,E)$ le morphisme induit par f_i. Si $m_0, m_1, m_2 \gg 0$ on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E) \ \simeq \ \ker(\phi_2)/\,\mathrm{im}(\phi_1).$$

Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ et $\phi : F_1 \to E$ au dessus de σ (on a donc $\phi \circ f_2 = 0$). Soient $\eta = (\phi, f_1)$ et $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(\eta)$. On a un morphisme injectif évident $E \to \mathcal{E}$, et un morphisme surjectif $\mathcal{E} \to F$, dont le noyau est égal à l'image du précédent, d'où une suite exacte $0 \to E \to \mathcal{E} \to F \to 0$, dont l'élément associé de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ est précisément σ.

Un élément λ de l'image de π provient d'un morphisme $\psi : F_1 \to E$ se factorisant localement par F_0, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et pour tout i un morphisme $\alpha_i : F_{0|U_i} \to E_{|U_i}$ tel que sur U_i ont ait $\psi = \alpha_i f_1$. Pour tous i, j, $\alpha_i - \alpha_j$ s'annule sur $\ker(f_0) = \mathrm{im}(f_1)$ et induit donc un morphisme $\tau_{ij} : F_{|U_{ij}} \to E_{|U_{ij}}$. La famille (τ_{ij}) est un cocycle et définit donc un élément de $H^1(\mathcal{H}om(F,E))$, dont l'image dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ est λ.

Réciproquement, étant donné un tel cocycle (τ_{ij}), $(\tau_{ij} f_0)$ représente un élément de $H^1(\mathcal{H}om(F_0,E))$. On peut supposer ce dernier nul (car $m_0 \gg 0$). Donc il existe une famille (α_i), $\alpha_i : F_{0|U_i} \to E_{|U_i}$, telle que pour tout i, j on ait $\tau_{ij} f_0 = \alpha_i - \alpha_j$. On a $\alpha_i f_1 = \alpha_j f_1$ sur U_{ij}, donc les $\alpha_i f_1$ se recollent et définissent un morphisme $F_1 \to E$ d'où provient l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ induit par (τ_{ij}).

2.4.2. *Description de* π - Soient $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$ et $\lambda \in H^1(\mathcal{H}om(F,E))$. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de X tel que λ soit représenté par un cocycle (τ_{ij}), $\tau_{ij} : F_{|U_{ij}} \to E_{|U_{ij}}$. Soit

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\nu} \mathcal{E} \xrightarrow{\mu} F \longrightarrow 0$$

l'extension correspondant à σ. Posons

$$\gamma_{ij} = I_{\mathcal{E}} + \nu\tau_{ij}\mu : \mathcal{E}_{|U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{E}_{|U_{ij}}.$$

Alors on a $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ pour tous i, j, k. Donc on peut définir un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X en recollant les $\mathcal{E}_{U_{ij}}$ au moyen des automorphismes γ_{ij}. Les morphismes $\nu : E_{|U_{ij}} \to \mathcal{E}_{|U_{ij}}$ et $\mu : \mathcal{E}_{|U_{ij}} \to F_{|U_{ij}}$ se recollent aussi (car $\mu\gamma_{ij} = \mu$ et $\gamma_{ij}\nu = \nu$), et on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\nu'} \mathcal{F} \xrightarrow{\mu'} F \longrightarrow 0,$$

correspondant à $\sigma' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F,E)$.

2.4.3. Proposition : *On a* $\sigma' = \sigma + \lambda$.

Démonstration. On utilise les notations précédentes. On a $\mathcal{F} = \mathrm{coker}(\eta')$, où

$$\eta'_{|U_i} = (\phi + \alpha_i f_1, f_1) : F_{1|U_i} \longrightarrow E_{|U_i} \oplus F_{0|U_i}.$$

Rappelons que $\mathcal{E} = \mathrm{coker}(\eta)$, avec $\eta = (\phi, f_1)$. On a donc un diagramme commutatif sur U_i

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, equal] & E \oplus F_0 \arrow[d, "\beta_i"] \\ F_1 \arrow[r, "\eta"] & E \oplus F_0 \end{tikzcd}$$

avec $\beta_i = \begin{pmatrix} 1 & -g_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, induisant un isomorphisme $\gamma_i : \mathcal{F}_{|U_i} \simeq \mathcal{E}_{|U_i}$. Le résultat découle du fait que $\gamma_j \gamma_i^{-1} = \gamma_{ij}$ (cf. 2.4.2). $\square$

2.5. Prolongement de fibrés vectoriels

Soit C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n de courbe réduite associée C. Le résultat suivant généralise le théorème 3.1.1 de [7] :

2.5.1. Théorème : *Soient X une variété algébrique affine irréductible, i un entier tel que $1 \leq i < n$ et Y une sous-variété fermée de $X \times C_n$ contenant $X \times C_i$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur Y. Alors il existe un faisceau localement libre $\mathbb{E}$ sur $X \times C_n$ tel que $\mathbb{E}_{|Y} \simeq \mathcal{E}$.*

Démonstration. On utilisera le résultat suivant : pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X \times C_n$, on a $H^i(\mathcal{F}) = \{0\}$ pour $i \geq 2$. En effet, soit p_n la projection $X \times C_n \to C_n$. Comme X est affine, les images directes $R^j p_n^*(\mathcal{E})$ sont nulles pour $j > 0$. On a donc $H^i(\mathcal{F}) \simeq H^i(p_{n*}(\mathcal{F}))$, qui est nul si $i \geq 2$.

En raisonnant par récurrence on se ramène au cas où $i = n - 1$.

Soit $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux de Y dans $X \times C_n$. Remarquons que son support contenu dans $X \times C$. On note $E_0 = \mathcal{E}_{|X \times C}$.

Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de Y tel que chaque restriction $\mathcal{E}_{|U_i}$ soit un fibré trivial. On peut voir (U_i) comme un recouvrement de $X \times C_n$. Soient $\lambda_i : \mathcal{E}_{|U_i} \simeq \mathcal{O}_Y(U_i) \otimes \mathbb{C}^r$ des trivialisations, $\lambda_{ij} = \lambda_j \circ \lambda_i^{-1} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_Y(U_{ij}))$. Soient $\Lambda_{ij} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}_{X \times C_n}(U_{ij}))$ une extension de λ_{ij} et $\rho_{ijk} = \Lambda_{jk}\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}$ (élément de $\mathcal{O}_{X \times C_n}(U_{ijk}) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^r)$). Alors les Λ_{ij} définissent un fibré vectoriel sur $X \times C_n$ si et seulement si les ρ_{ijk} sont nuls. Leurs restrictions à Y sont nulles, donc on peut les considérer comme des éléments de $\mathrm{End}(\mathcal{O}_{X \times C_n}(U_{ijk}) \otimes \mathbb{C}^r) \otimes \mathcal{I}_Y(U_{ijk})$. Soit $\mu_{ijk} = (\lambda_k)^{-1}\rho_{ijk}\lambda_i$, qui est un élément de $\mathcal{H}om(E_0, E_0 \otimes \mathcal{I}_Y)(U_{ijk})$. Pour obtenir une extension de $\mathcal{E}$ à $X \times C_n$ on peut remplacer les Λ_{ij} par $\Lambda'_{ij} = \Lambda_{ij} - \beta_{ij}$, avec β_{ij} nul sur Y. On peut donc considérer les β_{ij} comme des éléments de $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_C \otimes \mathbb{C}^r, \mathcal{I}_Y \otimes \mathbb{C}^r)(U_{ij})$. Soit $\rho'_{ijk} = \Lambda'_{jk}\Lambda'_{ij} - \Lambda'_{ik}$. Alors on a $\rho'_{ijk} = \rho_{ijk} - \beta_{jk}\Lambda_{ij} - \Lambda_{jk}\beta_{ij} + \beta_{ik}$. Posons $\alpha_{ij} = (\lambda_j)^{-1}\beta_{ij}\lambda_i$, qui est un élément de $\mathcal{H}om(E_0, E_0 \otimes \mathcal{I}_Y)(U_{ij})$. Alors on a $\rho'_{ijk} = 0$ si et seulement si

$$(*) \qquad \mu_{ijk} \ = \ \alpha_{ij} + \alpha_{jk} - \alpha_{ik}.$$

On a $\Lambda_{kl}\rho_{ijk} - \rho_{ijl} + \rho_{ikl} - \rho_{jkl}\Lambda_{ij} = 0$, d'où il découle que $\mu_{ijk} - \mu_{ijl} + \mu_{ikl} - \mu_{jkl} = 0$, c'est-à-dire que (μ_{ijk}) est un cocycle associé au faisceau $\mathcal{H}om(E_0, E_0 \otimes \mathcal{I}_Y)$ sur $X \times C$ et au recouvrement (U_i). Comme on l'a vu, on a $H^2(\mathcal{H}om(E_0, E_0 \otimes \mathcal{I}_Y)) = \{0\}$, d'où l'existence des α_{ij} satisfaisant l'égalité $(*)$ et des β_{ij} définissant le prolongement voulu de $\mathcal{E}$. □

2.6. Groupe de Picard

Soient C_n une courbe multiple primitive de multiplicité n de courbe réduite associée C projective et d un entier. Soit L le fibré en droites sur C associé à C_n. Contrairement à ce qui est affirmé dans [7], 3.2, l'existence d'un fibré de Poincaré sur $\mathrm{Pic}^d(C_n) \times C_n$ n'est assurée que sous certaines hypothèses, par exemple si $\deg(L) \leq 0$ et si $L^i \neq \mathcal{O}_C$ pour $1 \leq i \leq n$. Cela est dù au fait qu'en général les faisceaux $\mathcal{O}_i$ peuvent avoir des sections non triviales (cf. [19]). On va décrire ici sommairement la construction de [7], 3.2, qui donne en fait une variété lisse $\Lambda_n^d(C_n)$ au dessus $\mathrm{Pic}^d(C_n)$ et un "fibré de Poincaré" $\mathcal{D}_n$ sur $\Lambda_n^d(C_n) \times C_n$.

Soient $\mathbb{D}_{n-1}$ un fibré en droites sur C_{n-1} et $D = \mathbb{D}_{n-1|C}$. Si $\mathbb{D}$ est un fibré en droites sur C_n prolongeant $\mathbb{D}_{n-1}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow D \otimes L^{n-1} \longrightarrow \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}_{n-1} \longrightarrow 0.$$

On a une suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(L^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{D}_{n-1}, L^{n-1} \otimes D) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0 \\
& \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathbb{D}_{n-1|C}, D \otimes L^{n-1}) & \mathrm{Hom}(\mathbb{D}^{(1)}_{n-1} \otimes L, D \otimes L^{n-1}) & &
\end{tikzcd}$$

(cf. [8] ou 3.5.4). Les fibrés en droites sur C_n prolongeant $\mathbb{D}_{n-1}$ sont les extensions paramétrées par $\phi^{-1}(1)$.

La variété $\Lambda^d_n(C_n)$ et le fibré en droites $\mathcal{D}_n$ se construisent par récurrence sur n au moyen d'une "extension universelle": $\Lambda^d_n(C_n)$ est un fibré en espaces affines sur $\Lambda^d_{n-1}(C_{n-1})$.

3. Propriétés élémentaires des faisceaux cohérents sur les courbes multiples primitives

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

3.1. Filtrations canoniques

Soient P un point fermé de C, M un $\mathcal{O}_{nP}$-module de type fini. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n.

3.1.1. *Première filtration canonique* - On définit la *première filtration canonique de M* : c'est la filtration

$$M_n = \{0\} \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

telle que pour $0 \leq i < n$, M_{i+1} soit le noyau du morphisme canonique surjectif $M_i \to M_i \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}$. On a donc

$$M_i/M_{i+1} \ = \ M_i \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{C,P}, \qquad M/M_i \ \simeq \ M \otimes_{\mathcal{O}_{n,P}} \mathcal{O}_{i,P}, \qquad M_i \ = \ z^i M.$$

On pose, si $i > 0$, $G_i(M) = M_i/M_{i+1}$. Le gradué

$$\mathrm{Gr}(M) \ = \ \bigoplus_{i=0}^{n-1} G_i(M) \ = \ \bigoplus_{i=0}^{n-1} z^i M/z^{i+1} M$$

est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- on a $M_i = \{0\}$ si et seulement si M est un $\mathcal{O}_{i,P}$-module,
- M_i est un $\mathcal{O}_{n-i,P}$-module, et sa filtration canonique est $\{0\} \subset M_n \subset \cdots \subset M_{i+1} \subset M_i$,
- tout morphisme de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules envoie la première filtration canonique du premier module sur celle du second.

On définit de même la *première filtration canonique de* $\mathcal{E}$: c'est la filtration

$$\mathcal{E}_n = 0 \subset \mathcal{E}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$$

telle que pour $0 \leq i < n$, $\mathcal{E}_{i+1}$ soit le noyau du morphisme canonique surjectif $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_{i|C}$. On a donc $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_{i|C}$, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{|C_i}$. On pose, si $i \geq 0$,

$$G_i(\mathcal{E}) \ = \ \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i+1}.$$

Le gradué $\mathrm{Gr}(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- on a $\mathcal{E}_i = \mathcal{I}_C^i\mathcal{E}$, et donc $\mathrm{Gr}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{I}_C^j\mathcal{E}/\mathcal{I}_C^{j+1}\mathcal{E}$.
- on a $\mathcal{E}_i = 0$ si et seulement si $\mathcal{E}$ est un faisceau sur C_i,
- $\mathcal{E}_i$ est un faisceau sur C_{n-i}, et sa filtration canonique est $0 \subset \mathcal{E}_n \subset \cdots \subset \mathcal{E}_{i+1} \subset \mathcal{E}_i$.
- tout morphisme de faisceaux cohérents sur C_n envoie la première filtration canonique du premier sur celle du second.

3.1.2. *Type complet d'un faisceau cohérent* - La paire

$$\Big(\big(\,\mathrm{rg}(G_0(\mathcal{E})), \ldots, \mathrm{rg}(G_{n-1}(\mathcal{E}))\big), \big(\,\mathrm{deg}(G_0(\mathcal{E})), \ldots, \mathrm{deg}(G_{n-1}(\mathcal{E}))\big)\Big)$$

s'appelle le *type complet* de $\mathcal{E}$.

3.1.3. *Seconde filtration canonique* - On définit la *seconde filtration canonique de* M : c'est la filtration

$$M^{(0)} = \{0\} \subset M^{(1)} \subset \cdots \subset M^{(n-1)} \subset M^{(n)} = M$$

avec $M^{(i)} = \big\{u \in M ; z^i u = 0\big\}$. Si $M_n = \{0\} \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$ est la (première) filtration canonique de M on a $M_i \subset M^{(n-i)}$ pour $0 \leq i \leq n$. On pose, si $i > 0$, $G^{(i)}(M) = M^{(i)}/M^{(i-1)}$. Le gradué

$$\mathrm{Gr}_2(M) \ = \ \bigoplus_{i=1}^{n} G^{(i)}(M)$$

est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $1 < i \leq n$
- $M^{(i)}$ est un $\mathcal{O}_{i,P}$-module, et sa filtration canonique est
$\{0\} \subset M^{(1)} \subset \cdots \subset M^{(i-1)} \subset M^{(i)}$,
- tout morphisme de $\mathcal{O}_{n,P}$-modules envoie la seconde filtration canonique du premier module sur celle du second.

On définit de même la *seconde filtration canonique de* $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}^{(0)} = \{0\} \subset \mathcal{E}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(n-1)} \subset \mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{E}.$$

On pose, si $i > 0$,

$$G^{(i)}(\mathcal{E}) \ = \ \mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{E}^{(i-1)}.$$

Le gradué $\mathrm{Gr}_2(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{O}_C$-module. Les propriétés suivantes sont immédiates : si $0 < i \leq n$
- $\mathcal{E}^{(i)}$ est un faisceau sur C_i, et sa filtration canonique est $0 \subset \mathcal{E}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{(i-1)} \subset \mathcal{E}^{(i)}$,
- tout morphisme de faisceaux cohérents sur C_n envoie la seconde filtration canonique du premier sur celle du second.

3.1.4. Proposition : *On a des isomorphismes canoniques :*
(i) $\mathcal{E}_i \simeq (\mathcal{E}/\mathcal{E}^{(i)}) \otimes \mathbb{L}^i$.
(ii) $(\mathcal{E}^{(i)})^{(j)} \simeq \mathcal{E}^{(\min(i,j))}$.
(iii) $(\mathcal{E}_i)_j \simeq \mathcal{E}_{i+j}$.
(iv) $(\mathcal{E}_i)^{(j)} \simeq (\mathcal{E}^{(i+j)}/\mathcal{E}^{(i)}) \otimes \mathbb{L}^i$.
(v) $(\mathcal{E}^{(i)})_j = 0$ *si* $i \leq j$, *et* $(\mathcal{E}^{(i)})_j \simeq (\mathcal{E}_j)^{(i-j)}$ *si* $i > j$.

Démonstration. Immédiat, en examinant ce qui se passe en chaque point de C. □

3.1.5. *Relations entre les deux filtrations* - Soient i, k des entiers tels que $0 < i < n$, $0 < k \leq i+1$. Le morphisme canonique $\mathcal{E} \otimes \mathbb{L} \to \mathcal{E}$ induit un morphisme de faisceaux cohérents sur C :
$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}(\mathcal{E}) : G^{(i+1)}(\mathcal{E}) \otimes L^k \longrightarrow G^{(i+1-k)}(\mathcal{E}).$$
On posera, si $0 \leq i < n$,
$$\Gamma^{(i)}(\mathcal{E}) \ = \ \mathrm{coker}(\lambda_{i+1,1}).$$
Soient j, m des entiers tels que $j, m > 0$, $j+m \leq n$. Le morphisme canonique $\mathcal{E} \otimes \mathbb{L} \to \mathcal{E}$ induit un morphisme de faisceaux cohérents sur C :
$$\mu_{jm} = \mu_{jm}(\mathcal{E}) : G_j(\mathcal{E}) \otimes L^m \longrightarrow G_{j+m}(\mathcal{E}).$$
On posera, si $0 \leq j < n$,
$$\Gamma_j(\mathcal{E}) \ = \ \ker(\mu_{j1}).$$

3.1.6. Lemme : *Le noyau du morphisme canonique surjectif* $\mathcal{E}_i \otimes \mathbb{L} \to \mathcal{E}_{i+1}$ *est isomorphe à* $G^{(i+1)}(\mathcal{E}) \otimes L^{i+1}$.

Démonstration. Cela découle du diagramme commutatif avec lignes exactes
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{(i)} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_i \otimes \mathbb{L}^{-i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{(i+1)} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E}_{i+1} \otimes \mathbb{L}^{-i-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
□

3.1.7. Proposition : *1 - Le morphisme de faisceaux λ_{ik} est injectif. De plus, on a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow L^{i+1-k} \otimes \mathrm{coker}(\lambda_{i,k}) \longrightarrow \mathcal{E}_{i-k|C_k} \otimes \mathbb{L} \longrightarrow \mathcal{E}_{i+1-k}/\mathcal{E}_{i+1} \longrightarrow 0.$$

2 - Le morphisme μ_{jm} est surjectif, et on a une suite exacte de faisceaux cohérents sur C_m :

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}^{(j+m+1)}/\mathcal{E}^{(j+1)}) \otimes \mathbb{L}^{j+m+1} \longrightarrow (\mathcal{E}^{(j+m)}/\mathcal{E}^{(j)}) \otimes \mathbb{L}^{j+m} \longrightarrow \ker(\mu_{jm}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On ne démontrera que 1-, 2- étant analogue. L'injectivité de λ_{ik} se démontre aisément en examinant ce qui se passe en chaque point. La suite exacte est obtenue à partir du diagramme commutatif avec lignes exactes déduites du lemme 3.1.6

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G^{(i+1)}(\mathcal{E}) \otimes L^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\lambda_{ik}\otimes I_{L^{i+1-k}}"] & \mathcal{E}_i \otimes \mathbb{L} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{E}_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & G^{(i+1-k)}(\mathcal{E}) \otimes L^{i+1-k} \arrow[r] & \mathcal{E}_{i-k} \otimes \mathbb{L} \arrow[r] & \mathcal{E}_{i+1-k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

3.1.8. Corollaire : *Si $0 \leq i < n$, on a un isomorphisme canonique $\Gamma_i(\mathcal{E}) \simeq \Gamma^{(i)}(\mathcal{E}) \otimes L^{i+1}$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 3.1.7, 1- en prenant $k = 1$, ou de 2- en prenant $m = 1$, ou directement du lemme 3.1.6. □

3.1.9. Proposition : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur C_n. Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme. Alors ϕ est surjectif si et seulement si le morphisme $\phi_{|C} : G_0(\mathcal{E}) \to G_0(\mathcal{F})$ de faisceaux sur C induit par ϕ l'est. Si c'est le cas les morphismes $G_i(\mathcal{E}) \to G_i(\mathcal{F})$ induits par ϕ sont surjectifs pour $1 \leq i < n$.*

Le morphisme ϕ est injectif si et seulement si le morphisme $G^{(1)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{(1)} \to G^{(1)}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{(1)}$ de faisceaux sur C l'est. Si c'est le cas les morphismes $G^{(i)}(\mathcal{E}) \to G^{(i)}(\mathcal{F})$ induits par ϕ sont injectifs pour $1 \leq i < n$.

Démonstration. Supposons que ϕ soit surjectif. Alors $\phi_{|C}$ l'est. La réciproque se démontre par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons qu'elle soit vraie pour $n - 1 \geq 1$, et que $\phi_{|C}$ soit surjectif. Alors ϕ induit $\phi_1 : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{F}_1$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_0(\mathcal{E}) \otimes L \arrow[r, two heads, "\mu_{01}(\mathcal{E})"] \arrow[d] & G_1(\mathcal{E}) = G_0(\mathcal{E}_1) \arrow[d] \\
G_0(\mathcal{F}) \otimes L \arrow[r, two heads, "\mu_{01}(\mathcal{F})"] & G_1(\mathcal{F}) = G_0(\mathcal{F}_1)
\end{tikzcd}$$

d'où il découle que $\phi_{1|C}$ est surjectif. D'après l'hypothèse de récurrence, ϕ_1 est surjectif. La surjectivité de ϕ se déduit aisément de celles de $\phi_{|C}$ et ϕ_1. La surjectivité du morphisme

$G_i(\mathcal{E}) \to G_i(\mathcal{F})$ découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_0(\mathcal{E}) \otimes L^i \arrow[r, two heads, "\mu_{0i}(\mathcal{E})"] \arrow[d] & G_i(\mathcal{E}) \arrow[d] \\
G_0(\mathcal{F}) \otimes L^i \arrow[r, two heads, "\mu_{0i}(\mathcal{F})"] & G_i(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

La seconde assertion se démontre de manière analogue. □

3.2. Invariants

3.2.1. *Rang généralisé* - L'entier $R(M) = \mathrm{rg}(\mathrm{Gr}(M))$ s'appelle le *rang généralisé* de M.

L'entier $R(\mathcal{E}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *rang généralisé* de $\mathcal{E}$. On a donc $R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}_P)$ pour tout $P \in C$.

3.2.2. *Degré généralisé* - L'entier $\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \deg(\mathrm{Gr}(\mathcal{E}))$ s'appelle le *degré généralisé de* $\mathcal{E}$.

Si $R(\mathcal{E}) > 0$ on pose $\mu(\mathcal{E}) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E})/R(\mathcal{E})$ et on appelle ce nombre la *pente* de $\mathcal{E}$.

3.2.3. Proposition : *1 - Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_{n,P}$*-modules de type fini. Alors on a* $R(M) = R(M') + R(M'')$.

2 - Soit $0 \to E \to F \to G \to 0$ *une suite exacte de faisceaux cohérents sur* C_n*. Alors on a* $R(F) = R(E) + R(G)$, $\mathrm{Deg}(F) = \mathrm{Deg}(E) + \mathrm{Deg}(G)$.

3.2.4. Proposition : *Posons* $r_j = \mathrm{rg}(G_j(\mathcal{E}))$ *pour* $0 \leq j < n$*. On a, pour* $0 \leq i < n$*,*

$$\mathrm{rg}(G^{(i+1)}(\mathcal{E})) = \mathrm{rg}(G_i(\mathcal{E}))$$

et

$$\deg(G^{(i+1)}(\mathcal{E})) = \deg(G_i(\mathcal{E})) + (r_{i+1} + \cdots + r_{n-1} - i.r_i)\deg(L).$$

Démonstration. Posons, pour $0 \leq j < n$, $s_j = \mathrm{rg}(G^{(j+1)}(\mathcal{E}))$, $d_j = \mathrm{rg}(G_j(\mathcal{E}))$, $e_j = \mathrm{rg}(G^{(j+1)}(\mathcal{E}))$, et si $j < n-1$, $\delta_j = d_{j+1} - d_j$, $\epsilon_j = e_{j+1} - e_j$. On a, d'après le corollaire 3.1.8, une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^{(j+2)}(\mathcal{E}) \otimes L^{j+2} \longrightarrow G^{(j+1)}(\mathcal{E}) \otimes L^{j+1} \longrightarrow G_j(\mathcal{E}) \otimes L \longrightarrow G_{j+1}(\mathcal{E}) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que $s_j - s_{j+1} = r_j - r_{j+1}$, et on en déduit la première égalité de la proposition, compte tenu du fait que

$$r_0 + \cdots + \cdots r_{n-1} = s_0 + \cdots + \cdots s_{n-1} = R(\mathcal{E})$$

(d'après la proposition 3.2.3). On a, d'après la suite exacte précédente

$$\epsilon_j - \delta_j = \big(j.r_j - (j+2)r_{j+1}\big)\deg(L). \tag{1}$$

On a $d_{i+1} = d_0 + \delta_0 + \cdots \delta_i$, $e_{i+1} = e_0 + \epsilon_0 + \cdots \epsilon_i$, et

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} d_i &= nd_0 + (n-1)\delta_0 + (n-2)\delta_1 + \cdots + \delta_{n-2} \\ &= \mathrm{Deg}(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i \\ &= ne_0 + (n-1)\epsilon_0 + (n-2)\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-2},\end{aligned}$$

d'où, en utilisant (1)

$$\begin{aligned}n(d_0 - e_0) &= \big(((n-1)(0.r_0 - 2r_1) + \cdots + (n-j)\big((j-1)r_{j-1} - (j+1)r_j\big) + \cdots\big)\deg(L) \\ &= -n(r_1 + \cdots + r_{n-1})\deg(L).\end{aligned}$$

Donc $e_0 = d_0 + (r_1 + \cdots + r_{n-1})\deg(L)$, c'est la seconde égalité de la proposition 3.2.4 pour $i = 0$. Le cas général se démontre ensuite par récurrence sur i en utilisant (1). □

3.3. Torsion

Soit M un $\mathcal{O}_{nP}$-module de type fini. Le *sous-module de torsion* $T(M)$ *de* M est constitué des éléments annulés par une puissance de x. On dit que M est *sans torsion* si ce sous-module est nul. C'est donc le cas si et seulement si pour tout $m \in M$ non nul et tout entier $p > 0$ on a $x^p m \neq 0$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Le *sous-faisceau de torsion* $T(\mathcal{E})$ *de* $\mathcal{E}$ est le sous-faisceau maximal de $\mathcal{E}$ dont le support est fini. Pour tout point fermé P de C on a $T(\mathcal{E})_P = T(\mathcal{E}_P)$. On dit que $\mathcal{E}$ est un faisceau *de torsion* si $\mathcal{E} = T(\mathcal{E})$, ou ce qui revient au même, si son support est fini.

3.3.1. Proposition : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}$ *est sans torsion.*
(ii) $G^{(1)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{(1)}$ *est localement libre.*

De plus, si $\mathcal{E}$ est sans torsion, tous les faisceaux $G^{(i)}(\mathcal{E})$ sur C sont localement libres.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ soit sans torsion. Il en est de même de tous ses sous-faisceaux, et donc de $G^{(1)}(\mathcal{E})$. Comme les faisceaux sans torsion sur C sont les faisceaux localement libres, $G^{(1)}(\mathcal{E})$ est localement libre.

Réciproquement, supposons que $T(\mathcal{E}) \neq 0$. Il existe alors un point fermé P de C et $u \in \mathcal{E}_P$ non nul tel qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $x^p u = 0$. Soit q le plus grand entier tel que $z^q u \neq 0$. Alors on a $z^q u \in G^{(1)}(\mathcal{E}_P)$, et $x^p.z^q u = 0$, donc $G^{(1)}(\mathcal{E})_P$ a de la torsion.

Le démonstration de la seconde assertion est analogue. □

3.4. Faisceaux cohérents quasi localement libres

Soit M un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On dit que M est *quasi libre* s'il existe des entiers $m_1, \ldots, m_n$ non négatifs et un isomorphisme $M \simeq \bigoplus_{i=1}^n m_i \mathcal{O}_{i,P}$. Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés. On dit que M est *de type* $(m_1, \ldots, m_n)$. On a $R(M) = \sum_{i=1}^n i.m_i$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* en un point P de C s'il existe un ouvert U de C_n contenant P et des entiers non négatifs $m_1, \ldots, m_n$ tels que pour tout point Q de U, $\mathcal{E}_{n,Q}$ soit quasi localement libre de type $m_1, \ldots, m_n$. Les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont uniquement déterminés et ne dépendent que de $\mathcal{E}$, et on dit que $(m_1, \ldots, m_n)$ est le *type de* $\mathcal{E}$.

On dit que $\mathcal{E}$ est *quasi localement libre* s'il l'est en tout point de C_n.

3.4.1. Théorème : *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n et P un point fermé de C. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}_P$ est quasi localement libre en P.

(ii) Pour $0 \leq i < n$, $G_i(\mathcal{E})$ est libre en P.

(iii) Pour $0 \leq i < n$, $\Gamma^{(i)}(\mathcal{E})$ est libre en P.

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) est démontrée dans [7], théorème 5.1.4. Montrons que (ii) et (iii) sont équivalentes : d'après 3.1.8, (iii) équivaut à

(iii)' Pour $0 \leq i < n$, $\Gamma_i(\mathcal{E})$ est libre en P.

L'équivalence de (ii) et (iii)' est immédiate, compte tenu de la surjectivité des morphismes μ_{i1} et du fait que $\Gamma_{n-1}(\mathcal{E}) = G_{n-1}(\mathcal{E}) \otimes L$. □

3.4.2. Corollaire : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}$ est quasi localement libre.

(ii) Pour $0 \leq i < n$, $G_i(\mathcal{E})$ est localement libre sur C.

(iii) Pour $0 \leq i < n$, $\Gamma^{(i)}(\mathcal{E})$ est localement libre sur C.

3.4.3. Corollaire : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{E}$ est localement libre.

(ii) $\mathcal{E}$ admet une résolution localement libre de longueur finie.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{E}$ admette une résolution localement libre de longueur finie. Alors on a $\mathrm{Tor}^k(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \{0\}$ pour tout k suffisamment grand et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur

C_n. Soit i un entier tel que $1 \leq i < n$. On considère la résolution localement libre évidente de $\mathcal{O}_i$

$$\cdots \mathbb{L}^{2n} \longrightarrow \mathbb{L}^{n+i} \longrightarrow \mathbb{L}^{n} \longrightarrow \mathbb{L}^{i} \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_i,$$

définie par les morphismes canoniques $\mathbb{L}^i \to \mathcal{O}_n$ et $\mathbb{L}^{n-i} \to \mathcal{O}_n$. La suite induite

$$\cdots \mathbb{L}^{2n} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{n+i} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{n} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{L}^{i} \otimes \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{E}$$

a pour cohomologies les $\mathrm{Tor}^k(\mathcal{E}, \mathcal{O}_i)$. Elle est donc exacte à partir d'un certain degré. Il en découle que $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_{n-i}$. Puisque $\mathcal{E}$ est sans torsion, les $G^{(i)}(\mathcal{E})$ sont localement libres d'après la proposition 3.3.1. Il en est donc de même des $G_i(\mathcal{E})$. Donc d'après le théorème 3.4.1, $\mathcal{E}$ est quasi localement libre. Soient $(m_1, \ldots, m_n)$ le type de $\mathcal{E}$. Alors en un point P de C où $\mathcal{E}_P$ est identifié à $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} m_i\mathcal{O}_{iP}$ on a

$$\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} m_i\mathcal{O}_{iP} \ \subset \ \mathcal{E}_P^{(n-1)}.$$

Mais si $m_1, \ldots, m_{n-1}$ ne sont pas tous nuls on a

$$\overset{n-1}{\underset{i=1}{\oplus}} m_i\mathcal{O}_{iP} \ \not\subset \ \mathcal{E}_{1P}.$$

On a donc $m_1 = \cdots = m_{n-1} = 0$, et $\mathcal{E}$ est localement libre. □

Le résultat suivant sera utilisé au chapitre 6 :

3.4.4. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. On note $r_j = \mathrm{rg}(G_j(\mathcal{E}))$ pour $0 \leq j < n$. Alors le faisceau des endomorphismes $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ est aussi quasi localement libre, et on a*

$$R(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 \ , \qquad \mathrm{Deg}(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \big(\sum_{0\leq i<j<n} r_i r_j\big)\deg(L) \ .$$

Démonstration. Le fait que $\mathcal{E}nd(\mathcal{E})$ est quasi localement libre est immédiat. On a une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}^{(1)}) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit que

$$R(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = R(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1)) + \mathrm{rg}((\mathcal{E}_{|C})^* \otimes \mathcal{E}^{(1)}) \ , \mathrm{Deg}(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \mathrm{Deg}(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1)) + \deg((\mathcal{E}_{|C})^* \otimes \mathcal{E}^{(1)}) \ .$$

En raisonnant par récurrence sur n et en utilisant la proposition 3.1.4, (iv), on obtient les formules

$$R(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \sum_{0<i<n} \mathrm{rg}(G_i(\mathcal{E})^* \otimes G^{(i+1)}(\mathcal{E})) \ , \ \mathrm{Deg}(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) = \sum_{0<i<n} \deg(G_i(\mathcal{E})^* \otimes G^{(i+1)}(\mathcal{E}) \otimes L^i) \ .$$

Le résultat découle alors aisément de la proposition 3.2.4. □

3.5. Construction des faisceaux cohérents

On décrit ici le moyen de construire un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n, connaissant $\mathcal{E}_{|C}$ et $\mathcal{E}_1$ (ou $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}_1$), qui sont des faisceaux sur C et C_{n-1} respectivement. Cela de permet de faire des démonstrations par récurrence sur n dans les chapitres suivants.

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1. Si $\mathcal{G}$ est un fibré vectoriel sur C_k $(1 \leq k < n)$, il existe un fibré vectoriel $\mathbb{G}$ sur C_n qui prolonge $\mathcal{G}$ (cf. [7], théorème 3.1.1). En particulier le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_C$ de C dans C_n se prolonge en un fibré en droites $\mathbb{L}$ sur C_n. On en déduit une résolution localement libre de $\mathcal{G}$:

$$\cdots \mathbb{G}\otimes\mathbb{L}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{G}\otimes\mathbb{L}^{n} \longrightarrow \mathbb{G}\otimes\mathbb{L}^{k} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

3.5.1. *Première construction* - Soient $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur C_{n-1} et E un fibré vectoriel sur C. On s'intéresse aux faisceaux cohérents $\mathcal{E}$ sur C_n tels que $\mathcal{E}_{|C} = E$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F}$. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow E \longrightarrow 0$ une suite exacte, associée à $\sigma \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F})$. Soit $\pi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E}\otimes\mathcal{I}_C \to \mathcal{E}$ le morphisme canonique. On a

$$\mathrm{im}(\pi_{\mathcal{E}}) \subset \mathcal{F}, \quad \pi_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \mathrm{im}(\pi_{\mathcal{F}}).$$

Donc $\pi_{\mathcal{E}}$ induit un morphisme

$$\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma) : E\otimes L \longrightarrow \mathcal{F}_{|C},$$

et on obtient aisément le

3.5.2. Lemme : *On a* $\mathcal{E}_{|C} = E$ *et* $\mathcal{E}_1 = \mathcal{F}$ *si et seulement si* $\Phi_{\mathcal{F},E}(\sigma)$ *est surjectif.*

3.5.3. Proposition : *On a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(E,\mathcal{F}^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{F}E}} \mathrm{Hom}(E\otimes L,\mathcal{F}_{|C}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soit $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n prolongeant E et

$$\cdots \mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{E}\otimes\mathbb{L}^{n} \longrightarrow \mathbb{E}\otimes\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

la résolution localement libre induite. On en déduit l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}om(E\otimes L,\mathcal{F}_{|C}).$$

Le résultat découle alors de la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(E,\mathcal{F})) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(E,\mathcal{F})) \longrightarrow 0.$$

déduite de la suite spectrale des Ext (cf. [12], 7.3). □

3.5.4. *Seconde construction* - Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. On a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},V)\simeq\mathcal{H}om((\mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{E}_{n-1})\otimes L,V)$, d'où la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},V)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},V)\xrightarrow{\Theta_{\mathcal{E},V}}\mathrm{Hom}((\mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{E}_{n-1})\otimes L,V)\longrightarrow 0.$$

3.5.5. Proposition : *Soient $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n et V un fibré vectoriel sur C. Soient $0\to V\to\mathcal{F}\to\mathcal{E}\to 0$ une extension et $\sigma\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},V)$ l'élément associé.*

1- Le morphisme canonique $\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}\to\mathcal{F}$ en induit un, $(\mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{E}_{n-1})\otimes L\to V$, qui n'est autre que $\Theta_{\mathcal{E},V}(\sigma)$.

2 - Si $\mathcal{E}$ est concentré sur C_{n-1}, on a $V=\mathcal{F}^{(1)}$ si et seulement si $\Theta_{\mathcal{E},V}(\sigma)$ est injectif.

4. Faisceaux réflexifs

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

4.1. Dualité

Soient $P\in C$ et M un $\mathcal{O}_{n,P}$-module de type fini. On note $M^{\vee_n}$ le *dual* de M :
$M^{\vee_n}=\mathrm{Hom}(M,\mathcal{O}_{n,P})$. Si aucune confusion n'est à craindre on notera $M^\vee=M^{\vee_n}$. Si N est un $\mathcal{O}_{C,P}$-module, on note N^* le dual de N : $N^*=\mathrm{Hom}(N,\mathcal{O}_{C,P})$.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. On note $\mathcal{E}^{\vee_n}$ le *dual* de $\mathcal{E}$: $\mathcal{E}^{\vee_n}=\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{O}_n)$. Si aucune confusion n'est à craindre on notera $\mathcal{E}^\vee=\mathcal{E}^{\vee_n}$. Si E est un faisceau cohérent sur C, on note E^* le dual de E : $E^*=\mathcal{H}om(E,\mathcal{O}_C)$. Ces notations sont justifiées par le fait que $E^\vee\neq E^*$, et plus généralement on a

4.1.1. Lemme : *Soient i un entier tel que $1\leq i\leq n$ et $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_i. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{E}^{\vee_n}\ \simeq\ \mathcal{E}^{\vee_i}\otimes\mathcal{I}_C^{n-i}.$$

En particulier, pour tout faisceau cohérent E sur C, on a $E^{\vee_n}\simeq E^*\otimes L^{n-1}$.

Démonstration. Immédiat. □

4.1.2. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Alors on a, pour $1\leq i<n$, $(\mathcal{E}^\vee)^{(i)}=(\mathcal{E}/\mathcal{E}_i)^\vee$.*

Démonstration. Immédiat. □

4.1.3. *Dualité des faisceaux quasi localement libres* - Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. Alors on montre aisément qu'on a, pour $0 \leq i < n$, des isomorphismes canoniques

$$(\mathcal{E}^\vee)_i \simeq (\mathcal{E}_i)^\vee \otimes \mathbb{L}^i, \quad G^{(i+1)}(\mathcal{E}^\vee) \simeq G_i(\mathcal{E})^* \otimes L^{n-1}.$$

4.2. Faisceaux réflexifs - caractérisation

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Rappelons qu'on dit que $\mathcal{E}$ est *réflexif* si le morphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

4.2.1. Lemme : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. Alors $\mathcal{E}$ est réflexif et on a $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) = \{0\}$ pour tout $i \geq 1$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout point fermé P de C et tout entier m tel que $1 \leq m \leq n$, $\mathcal{O}_{mP}$ est un $\mathcal{O}_{nP}$-module réflexif et qu'on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{nP}}(\mathcal{O}_{mP}, \mathcal{O}_{nP}) = \{0\}$ pour tout $i \geq 1$. La première assertion est immédiate et la seconde se démontre en utilisant la résolution libre de $\mathcal{O}_{mP}$:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^m} \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^{n-m}} \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^m} \mathcal{O}_{nP} \longrightarrow \mathcal{O}_{mP}$$

□

4.2.2. Théorème : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathcal{E}$ est réflexif.*
(ii) *$\mathcal{E}$ est sans torsion.*
(iii) *On a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) = 0$.*

Si les conditions précédentes sont réalisées on a de plus $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration. On fait une récurrence sur n. Le résultat est bien connu pour $n = 1$. Supposons que $n > 1$ et que le résultat soit vrai pour $n - 1$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur C_{n-1}. D'après le lemme 4.1.1, $\mathcal{F}$ est aussi réflexif en tant que faisceau sur C_n. On va montrer qu'on a $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_n) = 0$ pour $i \geq 1$. On peut trouver une suite exacte de faisceaux cohérents sans torsion sur C_{n-1}

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

telle que $\mathcal{U}$ soit quasi localement libre (par exemple on peut utiliser un fibré en droites très ample $\mathcal{O}(1)$ sur C_{n-1} et prendre pour $\mathcal{U}$ une somme directe de $\mathcal{O}(-m)$ pour un m suffisamment grand). On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee_{n-1}} \longrightarrow \mathcal{U}^{\vee_{n-1}} \longrightarrow \mathcal{N}^{\vee_{n-1}} \longrightarrow 0,$$

et donc aussi la suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee_n} \longrightarrow \mathcal{U}^{\vee_n} \longrightarrow \mathcal{N}^{\vee_n} \longrightarrow 0.$$

On en déduit que

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_n) \ \subset \ \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_n).$$

D'après le lemme 4.2.1, on a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_n) = 0$, donc on a bien $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_n) = 0$. On a aussi

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_n) \simeq \mathcal{E}xt^{i+1}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_n)$$

pour $i \geq 1$, d'où il découle par récurrence sur i que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_n) = 0$ pour $i \geq 1$.

Il est évident qu'un faisceau ayant de la torsion n'est pas réflexif, donc (i) entraine (ii).

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sans torsion sur C_n. Montrons que $\mathcal{E}$ est réflexif et que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) = 0$. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Les faisceaux $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee$ sont de support contenu dans C_{n-1} et sans torsion. Puisque $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee, \mathcal{O}_n) = 0$, on en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}/\mathcal{E}^{(1)})^{\vee_n} \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee_n} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)*} \otimes L^{n-1} \longrightarrow 0.$$

De même en dualisant encore une fois on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee \longrightarrow 0$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}^{(1)} \arrow[r] & \mathcal{E}^{\vee\vee} \arrow[r] & \mathcal{E}_1 \otimes \mathbb{L}^\vee \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il en découle que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est réflexif. Le fait que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) = 0$ pour $i \geq 1$ découle aussi de la suite exacte (2) et du fait que le théorème est vrai pour $n-1$. On a donc montré que (ii) entraine (i) et (iii).

Il reste à montrer que si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur C_n ayant de la torsion, alors on a $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) \neq 0$. Soit $\mathbb{T}$ le sous-faisceau de torsion de $\mathcal{E}$. Alors $\mathcal{E}/\mathbb{T}$ est sans torsion. En utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathbb{T} \longrightarrow 0$$

et le fait que (ii) entraine (iii) on voit que

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) \ \simeq \ \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n).$$

Mais $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}, \mathcal{O}_n)$ contient le faisceau non nul $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T}_{|C}, \mathcal{O}_n) = \widetilde{\mathbb{T}_{|C}} \otimes L^{n-1}$, donc $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_n) \neq 0$. □

4.2.3. Corollaire : *Soit* $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ *une suite exacte de faisceaux cohérents sans torsion sur* C_n. *Alors la suite duale* $0 \to \mathcal{G}^\vee \to \mathcal{F}^\vee \to \mathcal{E}^\vee \to 0$ *est aussi exacte.*

4.2.4. Corollaire : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Alors on a $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{E},\mathcal{O}_n)=0$ pour $i\geq 2$.*

Démonstration. Il existe un morphisme surjectif $\mathbb{E}\to\mathcal{E}$, $\mathbb{E}$ étant un fibré vectoriel sur C_n (on peut prendre pour $\mathbb{E}$ une somme directe de copies de $\mathcal{O}(-k)$, $\mathcal{O}(1)$ étant un fibré en droites très ample sur C_n et k un entier assez grand). On a donc une suite exacte

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathbb{E}\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau sans torsion, donc réflexif. Le résultat découle donc de la suite exacte longue obtenue en dualisant la précédente, et du théorème 4.2.2. □

4.3. Dualité de Serre pour les faisceaux réflexifs

4.3.1. Théorème : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent réflexif sur C_n. Alors on a des isomorphismes fonctoriels*

$$H^i(C_n,\mathcal{F})\ \simeq\ H^{1-i}(C_n,\mathcal{F}^\vee\otimes\omega_{C_n})^*$$

pour $i=0,1$.

Démonstration. Le théorème de dualité de Serre (cf. par exemple [15], theorem III, 7.6) donne les isomorphismes

$$H^i(C_n,\mathcal{F})\simeq \mathrm{Ext}^{1-i}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F},\omega_{C_n})^*.$$

D'après la suite spectrale des Ext et le théorème 4.2.2 on a

$$\mathrm{Ext}^{1-i}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F},\omega_{C_n})\simeq H^{1-i}(C_n,\mathcal{F}^\vee\otimes\omega_{C_n}).$$

□

4.3.2. Remarque : La généralisation du résultat précédent aux Ext, c'est-à-dire le fait que

$$\mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{F},\mathcal{G})\simeq \mathrm{Ext}^{1-i}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{G},\mathcal{F}\otimes\omega_{C_n})^*$$

pour des faisceaux sans torsion $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, est fausse en général, contrairement à ce qui se passe sur les variétés lisses (cf. [10], prop. (1.2)). Par exemple, si $1<m<n$, la résolution canonique de $\mathcal{O}_i$

$$\cdots\longrightarrow\mathbb{L}^{2n}\longrightarrow\mathbb{L}^{n+m}\longrightarrow\mathbb{L}^{n}\longrightarrow\mathbb{L}^{m}\longrightarrow\mathcal{O}_n\longrightarrow\mathcal{O}_m$$

montre que

$$\mathrm{Ext}^{2i}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{O}_m,\mathcal{O}_C)=L^{in},\qquad \mathrm{Ext}^{2i+1}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{O}_m,\mathcal{O}_C)=L^{in+m}$$

pour tout $i\geq 0$, ce qui exclue la dualité précédente, qui entrainerait l'annulation des Ext^i pour $i\geq 2$.

5. Résolutions périodiques des faisceaux quasi localement libres

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

5.1. Fibrés vectoriels et faisceaux quasi localement libres

5.1.1. Proposition : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. Alors il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n et un morphisme surjectif $\mathbb{E}\to\mathcal{E}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{E}_{|C}\simeq\mathcal{E}_{|C}$.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est évident. Supposons donc que $n>1$ et que le résultat est vrai pour $n-1$. Si le support de $\mathcal{E}$ est contenu dans C_{n-1} il existe un fibré vectoriel $\mathbb{F}$ sur C_{n-1} et un morphisme surjectif $\mathbb{F}\to\mathcal{E}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{F}_{|C}\simeq\mathcal{E}_{|C}$. D'aprés [7], théorème 3.1.1, on peut étendre $\mathbb{F}$ en un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n, et on obtient ainsi le résultat voulu. On peut donc supposer que le support de $\mathcal{E}$ est C_n. Le morphisme quotient $\mathcal{E}\to\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1}$ induit un isomorphisme $\mathcal{E}_{|C}\simeq(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})_{|C}$, et d'après l'hypothèse de récurrence, puisque $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1}$ est de support C_{n-1}, il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}_0$ sur C_{n-1} et un morphisme surjectif $\phi_0:\mathbb{E}_0\to\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{E}_{0|C}\simeq(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1})_{|C}$. On cherche un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n prolongement de $\mathbb{E}_0$ tel qu'on ait un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{E}_{|C}\otimes L^{n-1}=\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{E} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}_{n-1} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est le morphisme canonique. Le morphisme ϕ est alors surjectif et induit un isomorphisme $\mathbb{E}_{|C}\simeq\mathcal{E}_{|C}$.

Soit $\sigma\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}/\mathcal{E}_{n-1},\mathcal{E})$, correspondant à la suite exacte du bas. Soit $\sigma'\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{n-1})$ l'image de σ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{n-1})$. Il suffit de montrer qu'il existe $\sigma''\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1})$ tel que dans l'extension associée

$$0\longrightarrow\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1}\longrightarrow\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{E}_0\longrightarrow 0,$$

$\mathbb{E}$ soit localement libre, et que l'image de σ'' dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{n-1})$ soit σ' (cf. [9], corollaire 4.3.3). D'après 3.5.4 on a un diagramme commutatif avec lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1}) \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathrm{End}(\mathcal{E}_{|C}) \arrow[d, "\theta"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}_{n-1}) \arrow[r, hook, "i"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{n-1}) \arrow[r, two heads, "\lambda"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1},\mathcal{E}_{n-1})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme canonique $\mu:\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1}\to\mathcal{E}_{n-1}$. On a $\lambda(\sigma')=\mu=\theta(I_{\mathcal{E}_{|C}})$. Soit $\sigma_0\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{E}_0,\mathcal{E}_{|C}\otimes L^{n-1})$ dont l'image dans $\mathrm{End}(\mathcal{E}_{|C})$ est $I_{\mathcal{E}_{|C}}$. Alors on a

$$\rho(\sigma_0)-\sigma'\ \in\ i(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}_{n-1})).$$

Puisque μ est surjectif il en est de même de γ. Donc il existe $\sigma_1 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}_{|C} \otimes L^{n-1})$ tel que

$$\rho(\sigma_0) - \sigma' \ = \ i \circ \gamma(\sigma_1) \ = \ \rho \circ i_0(\sigma_1).$$

On a alors $\sigma'' = \sigma_0 - i_0(\sigma_1)$. □

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. Soit $\phi : \mathbb{E} \to \mathcal{E}$ un morphisme surjectif, $\mathbb{E}$ étant localement libre, induisant un isomorphisme $\mathbb{E}_{|C} \simeq \mathcal{E}_{|C}$. Le faisceau $\mathcal{N} = \ker(\phi)$ est aussi quasi localement libre, d'après [7], théorème 5.2.1.

5.1.2. Lemme : *Soit $(m_1, \ldots, m_n)$ le type de $\mathcal{E}$. Alors le type de $\mathcal{N}$ est $(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, 0)$.*

Démonstration. Soit P un point fermé de C. On a $\mathcal{E}_P \simeq \bigoplus_{i=1}^n m_i\mathcal{O}_{iP}$. On en déduit la suite (e_j) constituée des éléments 1 des facteurs $\mathcal{O}_{iP}$. Soit $\overline{e_j}$ l'image de e_j dans $\mathcal{E}_{|C,P}$. Alors $(\overline{e_j})$ est une base de $\mathcal{E}_{|C,P}$. Soit $f_j \in \mathbb{E}_P$ au dessus de e_j, $\overline{f_j}$ l'image de f_j dans $\mathbb{E}_{|C,P}$. Alors $(\overline{f_j})$ est une base de $\mathbb{E}_{|C,P}$, puisque c'est l'image de la base $(\overline{e_j})$ par l'isomorphisme $\mathcal{E}_{|C,P} \simeq \mathbb{E}_{|C,P}$. En utilisant l'isomorphisme $\mathbb{E}_P \simeq \mathrm{rg}(\mathbb{E})\mathcal{O}_{nP}$ défini par cette base on voit que ϕ_P est la somme des morphismes canoniques $\mathcal{O}_{nP} \to \mathcal{O}_{iP}$. Le résultat en découle immédiatement. □

5.1.3. Remarque : Plus généralement, on démontre de la même façon que pour tout morphisme surjectif $f : \mathbb{F} \to \mathcal{E}$, $\mathbb{F}$ étant un fibré vectoriel de rang r sur C_n, $\ker(f)$ est un faisceau quasi localement libre de type $(m_{n-1}, m_{n-2}, \ldots, m_1, r - \sum_{i=1}^n m_i)$.

Il existe un lien étroit entre les faisceaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$. Dans le résultat suivant on compare les morphismes λ_{ij} et μ_{ij} pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$ (cf. 3.1.5) :

5.1.4. Proposition : *Soient q, k des entiers tels que $0 < k < q < n$. Alors il existe des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{coker}(\lambda_{q-1,k}(\mathcal{N})) \simeq \ker(\mu_{n-q,k}(\mathcal{E})), \qquad \mathrm{coker}(\lambda_{q-1,k}(\mathcal{E})) \otimes L^n \simeq \ker(\mu_{n-q,k}(\mathcal{N})).$$

Démonstration. Soient P un point fermé de C et $z \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation de C.

On définit d'abord le premier isomorphisme. Soient $u \in \mathcal{N}_P^{(q-k)}/\mathcal{N}_P^{(q-k-1)}$ et $\overline{u} \in \mathcal{N}_P^{(q-k)}$ au dessus de u. On a $z^{q-k}\overline{u} = 0$, donc $\overline{u} \in z^{n-q+k}\mathbb{E}_P$, et on peut écrire $\overline{u}$ sous la forme $\overline{u} = z^{n-q+k}v$. On a $\overline{u} \in \mathcal{N}_P$, donc $z^{n-q+k}\phi_P(v) = 0$. Soit $e \in \mathcal{E}_{|C,P}$ l'image de $\phi_P(v)$. On a donc $\mu_{n-q,k,P}(z^{n-q}e \otimes z^k) = 0$. On voit aisément que $z^{n-q}e \otimes z^k \in (\mathcal{E}_{n-q} \otimes L^k)_P$ est indépendant des choix effectués. On définit donc ainsi un morphisme

$$\overline{\psi} : \mathcal{N}^{(q-k)}/\mathcal{N}^{(q-k-1)} \longrightarrow \ker(\mu_{n-q,k}(\mathcal{E})).$$

Il est aisé de voir que si $u \in \mathrm{im}(\lambda_{q-1,k})_P$, alors $\overline{\psi}_P(u) = 0$. On obtient donc un morphisme

$$\psi : \mathrm{coker}(\lambda_{q-1,k}(\mathcal{N})) \longrightarrow \ker(\mu_{n-q,k}(\mathcal{E})).$$

On définit maintenant le morphisme inverse. Soit $w \in \mathcal{E}_{n-q,k,P}$ tel que $\mu_{n-q,k,P}(w \otimes z^k) = 0$. Soit $\beta \in \mathcal{E}_P$ tel que $z^{n-q}\beta$ soit au dessus de w. Il existe alors $\gamma \in \mathcal{E}_P$ tel que $z^{n-q+k}\beta = z^{n-q+k+1}\gamma$, c'est-à-dire $z^{n-q+k}(\beta - z\gamma) = 0$. Puisque $z^{n-q}(\beta - z\gamma) = 0$ est aussi au dessus de w, on peut supposer que $\gamma = 0$, c'est-à-dire $z^{n-q+k}\beta = 0$. Soit $u \in \mathbb{E}_P$ au dessus de β. On a donc $z^{n-q+k}u \in \mathcal{N}_P^{(q-k)}$. On définit le morphisme inverse en associant à $w \otimes z^k$ l'image de $z^{n-q+k}u$ dans $\mathrm{coker}(\mu_{n-q,k}(\mathcal{N})_P)$. Les vérifications sont laissées au lecteur.

La définition du second isomorphisme est analogue. $\square$

5.1.5. Corollaire : *On a, pour* $0 \leq i < n$*,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(G_i(\mathcal{N})) &= \mathrm{rg}(G^{(1)}(\mathcal{E})) - \mathrm{rg}(G^{(n-i)}(\mathcal{E})),\\
\deg(G_i(\mathcal{N})) &= \deg(G^{(1)}(\mathcal{E})) - \deg(G^{(n-i)}(\mathcal{E})) + \big((i+1)\,\mathrm{rg}(G^{(1)}(\mathcal{E})) - n\,\mathrm{rg}(G^{(n-i)}(\mathcal{E}))\big)\deg(L).
\end{aligned}$$

Démonstration. Posons

$$\rho_i = \mathrm{rg}(G_i(\mathcal{N})), \quad \delta_i = \deg(G_i(\mathcal{N})), \quad s_i = \mathrm{rg}(G^{(i+1)}(\mathcal{E})), \quad e_i = \deg(G^{(i+1)}(\mathcal{E})).$$

On déduit du second isomorphisme de la proposition 5.1.4 les égalités

$$\begin{aligned}
\rho_{n-q} - \rho_{n-q+1} &= s_{q-2} - s_{q-1},\\
\delta_{n-q} - \delta_{n-q+1} &= e_{q-2} - e_{q-1} + \big(s_{q-2}n - s_{q-1}(n+1) - \rho_{n-q}\big)\deg(L).
\end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{N}$ est concentré sur C_{n-1} on a $\rho_{n-1} = \delta_{n-1} = 0$, et les égalités précédentes donnent pour $q = 2$ le corollaire 5.1.5 pour $i = n-2$. On en déduit les autres cas par récurrence descendante sur i. $\square$

5.2. Support des Ext de faisceaux cohérents

5.2.1. Théorème : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur C_n, avec $\mathcal{E}$ sans torsion. Alors le support du faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est contenu dans C_{n-1}.*

Démonstration. Soient P un point fermé de C, $z \in \mathcal{O}_{nP}$ une équation de C, et $x \in \mathcal{O}_{nP}$ au dessus d'une équation de P dans $\mathcal{O}_{CP}$. Il suffit de prouver l'assertion locale analogue suivante : soient M, N des $\mathcal{O}_{nP}$-modules de type fini, M étant sans torsion. Alors on a $z^{n-1}.\,\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{nP}}(M,N) = \{0\}$. Pour tout $\mathcal{O}_{nP}$-module W, on note $X_W : W \to W$ la multiplication par z^{n-1}.

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathcal{O}_{nP}$-module libre de type fini tel qu'on ait un morphisme surjectif $\pi : \mathbb{E} \to M$. Soit $V = \ker(\pi)$. On a donc une suite exacte $0 \to V \to \mathbb{E} \to M \to 0$, d'où on déduit la suivante :

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{E}, N) \xrightarrow{r_N} \mathrm{Hom}(V, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{nP}}(M,N) \longrightarrow 0.$$

Il faut donc montrer que si $\alpha \in \mathrm{Hom}(V,N)$, alors $\alpha \circ X_V \in \mathrm{im}(r_N)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathbb{E},V) \arrow[r, "r_V"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathbb{E},\alpha)"] & \mathrm{Hom}(V,V) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(V,\alpha)"] \\ \mathrm{Hom}(\mathbb{E},N) \arrow[r, "r_N"] & \mathrm{Hom}(V,N) \end{tikzcd}$$

Supposons que l'assertion soit vraie pour $N=V$ et $\alpha = I_V$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{E},V)$ tel que $r_V(\lambda) = X_V$. On a alors en général

$$\alpha \circ X_V = \alpha \circ r_V(\lambda) = r_N(\alpha \circ \lambda),$$

d'après le diagramme commutatif précédent. Il suffit donc de traiter le cas où $N=V$ et $\alpha = I_V$, c'est-à-dire montrer que X_V se prolonge en un morphisme $\mathbb{E} \to V$.

Posons $V \otimes \mathcal{O}_{CP} = V_0 \oplus T_0$, où T_0 est de torsion et V_0 est un $\mathcal{O}_{CP}$-module libre. Il existe des bases $(e_i)_{1\leq i\leq \mathrm{rg}(V_0)}$, $(f_i)_{1\leq i\leq \mathrm{rg}(\mathbb{E})}$ de V_0, $\mathbb{E}$ respectivement, et un entier p, $0 \leq p \leq \mathrm{rg}(V_0)$, tels que le morphisme $\psi : V_0 \to \mathbb{E}\otimes\mathcal{O}_{CP}$ déduit de l'inclusion $V \subset \mathbb{E}$ soit tel que $\psi(e_i) = x^{k_i} f_i$ pour $1 \leq i \leq p$, avec $k_i \geq 0$, et $\psi(e_i) \in z\mathbb{E}$ si $i > p$. Soient $\epsilon_i \in V$, $\phi_j \in \mathbb{E}$ au dessus de e_i, f_j respectivement. Alors on a (en voyant V comme un sous-module de $\mathbb{E}$), $\epsilon_i = x^{k_i}\phi_i + zu_i$, avec $u_i \in \mathbb{E}$. Donc $z^{n-1}\epsilon_i = x^{k_i} z^{n-1}\phi_i$. Puisque M est sans torsion, on a $z^{n-1}\phi_i \in V$. On définit maintenant $\Theta : \mathbb{E} \to V$ par : $\Theta(\phi_i) = z^{n-1}\phi_i$ si $1 \leq i \leq p$, et $\Theta(\phi_i) = 0$ si $i > p$. On vérifie aisément que $\Theta_{|V} = X_V$. □

5.2.2. Remarque : L'hypothèse que $\mathcal{E}$ est sans torsion est nécessaire dans le théorème précédent. Par exemple si $\mathbb{T}$ est un faisceau de torsion sur C_n non contenu dans C_{n-1}, le support de $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathbb{T},\mathcal{O}_n)$ n'est pas contenu dans C_{n-1}.

5.2.3. Corollaire : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur C_n. Alors, pour tout entier $i \geq 2$, le support du faisceau $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est contenu dans C_{n-1}.*

Démonstration. Soit $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel sur C_n tel qu'on ait un morphisme surjectif $\phi : \mathbb{E} \to \mathcal{E}$. Soit $\mathcal{N} = \ker(\Phi)$. On a donc une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathbb{E} \to \mathcal{E} \to 0$. On en déduit que $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{N},\mathcal{F})$. D'après le théorème 5.2.1, le support de $\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est donc contenu dans C_{n-1}. Le cas des $\mathcal{E}xt^i$ pour $i \geq 2$ se traite par récurrence sur i. □

5.2.4. Corollaire : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur C_n, $\mathbb{D}$ un fibré en droites sur C_n tel que $\mathbb{D}_{|C_{n-1}} \simeq \mathcal{O}_{n-1}$. Alors, pour tout entier $i \geq 2$, il existe un isomorphisme canonique et fonctoriel $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{D}) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.*

Démonstration. Pour tout entier $j \geq 2$ on a

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{D}) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathbb{D} \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})$$

d'après le corollaire 5.2.3, donc le résultat découle de la suite spectrale des Ext et de sa fonctorialité. □

5.3. Morphismes et classes canoniques

Soit N un entier tel que $N \gg n$. D'après [8] il existe une courbe multiple primitive C_N extension de C_n tel que le faisceau d'idéaux de C dans C_N restreint à C_n soit isomorphe à $\mathbb{L}$. On peut donc noter aussi $\mathbb{L}$ un fibré en droites sur C_N extension de $\mathcal{I}_C$.

5.3.1. Lemme : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Alors on a un isomorphisme canonique* $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_N}(\mathcal{E},\mathcal{O}_n) \simeq \mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n$.

Démonstration. Cela découle de la résolution localement libre de $\mathcal{O}_n$ sur C_N

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{L}^N \longrightarrow \mathbb{L}^n \longrightarrow \mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0$$

et du fait que $N \gg n$. □

Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents sur C_n. D'après la proposition 2.3.1 on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_N}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_N}(\mathcal{E},\mathcal{O}_n),\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n)$$

$$\xrightarrow{\Lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n)$$

On a donc d'après le lemme 5.3.1 un morphisme canonique fonctoriel

$$\Lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n).$$

D'après le corollaire 5.2.4, $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n)$ est indépendant du choix de $\mathbb{L}$. En utilisant la preuve dans [7] de la proposition 2.3.1 on montre aisément que $\Lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ est indépendant du plongement de C_n dans C_N et est fonctoriel par rapport à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Les morphismes $\Lambda_{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ sont donc entièrement déterminés par les classes

$$\lambda_{\mathcal{E}} \ = \ \Lambda_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(I_{\mathcal{E}}) \ \in \ \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n).$$

5.4. Résolutions périodiques

On utilise comme dans 5.3 un plongement $C_n \subset C_N$ avec $N \gg n$. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. D'après la proposition 5.1.1 il existe un fibré vectoriel $\mathbb{V}$ sur C_N et un morphisme surjectif $\phi : \mathbb{V} \to \mathcal{E}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{V}_{|C} \simeq \mathcal{E}_{|C}$. Soit $\mathbb{U} = \ker(\phi)$. On a donc une suite exacte sur C_N :

$$0 \longrightarrow \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Soient $\mathbb{E} = \mathbb{V}_{|C_n}$, $\mathbb{F} = \mathbb{U}_{|C_n}$. Il découle du lemme 5.1.2 et du fait que $N \gg n$ que $\mathbb{F}$ est un fibré vectoriel sur C_n, de même rang que $\mathbb{E}$. En restreignant la suite exacte précédente à C_n et en utilisant le lemme 5.3.1 on obtient la suite exacte sur C_n

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

En utilisant la démonstration de la proposition 2.3.1 on montre aisément que l'élément de $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n)$ associé à la suite exacte précédente est $\lambda_{\mathcal{E}}$. On en déduit le

5.4.1. Théorème : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents, avec $\mathcal{E}$ quasi localement libre.*

1 - La multiplication par $\lambda_{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathbb{L}^n$$

est surjective.

2 - Pour tout entier $i\geq 1$ la multiplication par $\lambda_{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^{i+2}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathbb{L}^n$$

est un isomorphisme.

5.4.2. Corollaire : *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre sur C_n. Alors $\mathcal{E}$ est localement libre si et seulement si on a $\lambda_{\mathcal{E}}=0$.*

Démonstration. Si $\mathcal{E}$ est localement libre, on a

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n) = H^2(\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{E}\otimes\mathbb{L}^n) = \{0\} \quad ,$$

donc $\lambda_{\mathcal{E}}=0$. Réciproquement, supposons que $\lambda_{\mathcal{E}}=0$. D'après le théorème 5.4.1, 2-, on a

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{O}_C) \ = \ 0.$$

Supposons que $\mathcal{E}$ ne soit pas localement libre. Alors $\mathcal{E}$ est localement isomorphe à une somme directe de faisceaux du type $\mathcal{O}_k$ dont l'un d'entre eux au moins est tel que $k<n$. Il suffit donc de montrer que si P est un point fermé de C, alors on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{nP}}(\mathcal{O}_{kP},\mathcal{O}_{CP}) \ \neq \ \{0\} \quad .$$

Cela se voit aisément en utilisant la résolution canonique de $\mathcal{O}_{kP}$:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^k} \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^{n-k}} \mathcal{O}_{nP} \xrightarrow{\times z^k} \mathcal{O}_{nP} \longrightarrow \mathcal{O}_{kP}$$

(où $z\in\mathcal{O}_{nP}$ est une équation de C). □

5.4.3. Corollaire : *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux cohérents, avec $\mathcal{E}$ quasi localement libre.*

1 - La multiplication par $\lambda_{\mathcal{E}}$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n)$$

est surjective.

2 - Pour tout entier $i\geq 2$ la multiplication par $\lambda_{\mathcal{E}}$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+2}_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes\mathbb{L}^n)$$

est un isomorphisme.

6. Familles de faisceaux quasi localement libres

On considère dans ce chapitre une courbe multiple primitive C_n de courbe réduite associée C. On utilise les notations de 2.1.

6.1. Étude locale des familles de faisceaux de type constant

Soit Y une variété algébrique intègre de dimension $d > 0$. Soit s un entier tel que $1 \leq s \leq n$. Soit U un ouvert non vide de $Y \times C_n$ tel que la projection de U sur Y soit surjective. Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur U, plat sur Y. On suppose que pour tout point fermé $y \in Y$, $\mathcal{E}_y$ est de type $(m_1^y, \ldots, m_n^y)$, avec $m_1^y \ldots, m_s^y$ indépendants de y, et que pour $0 \leq i < s$, $G_i(\mathcal{E}_y)$ est localement libre sur C.

On dit qu'un tel faisceau est une *famille de faisceaux de type constant à l'ordre* s sur des ouverts de C_n (resp. sur C_n si $U = Y \times C_n$) paramétrée par Y. Si $s = n$ on dit que $\mathcal{E}$ est une *famille de faisceaux quasi localement libres de type constant* sur des ouverts de C_n (resp. sur C_n si $U = Y \times C_n$) paramétrée par Y.

On définit comme pour les faisceaux cohérents sur C_n les filtrations canoniques de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire les sous-faisceaux $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}^{(i)}$, $1 \leq i < n$.

Soient $P = (y, x)$ un point fermé de $Y \times C_n$, $z \in \mathcal{O}_{nx}$ une équation de C et I l'idéal de $\{y\} \times C_n$ dans $\mathbf{m} = \mathcal{O}_{Y \times C_n, P}$.

6.1.1. Lemme : *Le faisceau $\mathcal{E}_{|U \cap (Y \times C)}$ est localement libre de rang $m_1 + \cdots + m_n$.*

Démonstration. Cela découle du fait que pour tout point fermé P de $Y \times C$, si m_P désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y \times C_n, P}$, la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}_P \otimes (\mathcal{O}_{Y \times C_n, P}/m_P)$ est $m_1 + \cdots + m_n$, et du fait que $Y \times C$ est réduite. $\square$

On pose $\mathbb{V} = \mathcal{E}_{|U \cap (Y \times C)}$.

6.1.2. Proposition : *Soient $\tau_1, \ldots, \tau_k \in I$ dont les images dans $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$ sont linéairement indépendantes.*

1 - Soit $u \in \mathcal{E}_P$ tel que $zu \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$. Alors il existe $v \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$ tel que $zu = zv$.

2 - Soit $u \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$ tel que $zu = 0$. Alors on peut écrire u sous la forme $u = \tau_1 w_1 + \cdots + \tau_k w_k$, avec w_i tels que $zw_i = 0$.

Démonstration. Les deux assertions se démontrent par récurrence sur k. Supposons d'abord que $k = 1$ et soit $u \in \mathcal{E}_P$ tel que $zu \in (\tau_1)\mathcal{E}_P$: $zu = \tau_1 v$. En des points $P' = (y', x')$ voisins génériques de P, τ_1 est inversible, donc v est divisible par z dans $\mathcal{E}'_P$. Il en découle que l'image de v dans $\mathbb{V}_{P'}$ (la fibre en P' du fibré vectoriel $\mathbb{V}$) est nulle. Donc v est nul comme section locale de $\mathbb{V}$. Donc v est multiple de z : $v = zw$. On a donc $zu = z.\tau_1 w$, ce qui démontre 1- pour $k = 1$.

Soit $u \in (\tau_1)\mathcal{E}_P$ tel que $zu = 0$. Posons $u = \tau_1 v$. On a donc $\tau_1.zv = 0$. Puisque $\mathcal{E}$ est plat sur Y, la multiplication par τ_1 est injective. On a donc $zv = 0$, ce qui démontre 2- pour $k = 1$.

Supposons que 1- soit vraie pour $k-1 \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{E}_P$ tel que $zu \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$. On considère la sous-variété intègre d'un voisinage de P dans Y, définie par l'équation $\tau_k = 0$. Alors $\mathcal{E}_{|U\cap(Y'\times C_n)}$ est plat sur Y'. D'après l'hypothèse de récurrence on peut écrire $zu = zw + \tau_d\lambda$, avec $w \in (\tau_1, \ldots, \tau_{d-1})\mathcal{E}_P$, c'est-à-dire $z(u-w) = \tau_d\lambda$. En faisant le même raisonnement que dans le cas $k = 1$ on obtient que λ est multiple de z : $\lambda = z\beta$. D'où $zu = z(v + \tau_d\beta)$, et $v + \tau_d\beta \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$, ce qui démontre 1-.

Supposons que 2- soit vraie pour $k-1 \geq 1$. Soit $u \in (\tau_1, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$ tel que $zu = 0$. On considère la courbe intègre $Y' \subset Y$ définie au voisinage de y par les équations $\tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$. Posons $u = \tau_1 v_1 + \cdots + \tau_k v_k$. Sur Y' on a $u = \tau_1 v_1$, et d'après le cas $k = 1$ on a $zv_1 = 0 \bmod(\tau_2, \ldots, \tau_k)$. D'après 1- on peut écrire $zv_1 = zw$, avec $w \in (\tau_2, \ldots, \tau_k)\mathcal{E}_P$: $w = \tau_2 w_2 + \cdots + \tau_k w_k$. On a

$$z(u - \tau_1(v_1 - w)) = \tau_2(v_2 + t_1 w_2) + \cdots + \tau_k(v_k + t_1 w_k),$$

et $z(u - \tau_1(v_1 - w)) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$u - \tau_1(v_1 - w) = \tau_2 s_2 + \cdots + \tau_k s_k,$$

avec $zs_i = 0$ pour $2 \leq i \leq k$, ce qui démontre 2-. □

6.1.3. Corollaire : *Soit i un entier tel que $1 \leq i < s$.*

1 - Pour tout point fermé y de Y, les morphismes canoniques

$$(\mathcal{E}_i)_y \to (\mathcal{E}_y)_i, \qquad (\mathcal{E}^{(i)})_y \to (\mathcal{E}_y)^{(i)}, \qquad (\mathcal{E}/\mathcal{E}_i)_y \to \mathcal{E}_y/(\mathcal{E}_y)_i$$

sont des isomorphismes.

2 - Les faisceaux $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}^{(i)}$, $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ sont plats sur Y, et $\mathcal{E}/\mathcal{E}_i$ est une famille de faisceaux quasi localement libres de type constant à l'ordre s. Les faisceaux $G_i(\mathcal{E})$, $G^{(i)}(\mathcal{E})$ sont des fibrés vectoriels sur $Y \times C$.

3 - Les degrés des faisceaux $(\mathcal{E}_y)_i$, $(\mathcal{E}_y)^{(i)}$, $\mathcal{E}_y/(\mathcal{E}_y)_i$, $G_i(\mathcal{E}_y)$, $G^{(i)}(\mathcal{E}_y)$ sont indépendants du point fermé $y \in Y$. En particulier, si $s = n$, les faisceaux $\mathcal{E}_y$ sont de type complet constant (cf. 3.1.2).

Démonstration. On montre d'abord que $(\mathcal{E}^{(1)})_y \simeq (\mathcal{E}_y)^{(1)}$. Soit $\theta : (\mathcal{E}^{(1)})_y \to (\mathcal{E}_y)^{(1)}$ le morphisme canonique. Soient $x \in C$ un point fermé et $P = (y, x)$. Soient $u \in [(\mathcal{E}^{(1)})_y]_x$ et $\overline{u} \in \mathcal{E}_P^{(1)}$ au dessus de u. L'image v de u dans $(\mathcal{E}_y)_x$ est annulée par z, donc $v \in [(\mathcal{E}_y)^{(1)}]_x$, et $\theta_x(u) = v$.

Montrons que θ_x est injectif. Supposons que $\theta_x(u) = 0$. On a $z\overline{u} = 0$ et $\overline{u} \in I\mathcal{E}_P$. D'après la proposition 6.1.2, 2-, on a $\overline{u} \in I(\mathcal{E}^{(1)})_P$, donc $u = 0$ et θ_x est injectif.

Montrons que θ_x est surjectif. Soit $w \in [(\mathcal{E}_y)^{(1)}]_x$. On a donc $zw = 0$. Soit $\overline{w} \in \mathcal{E}_P$ au dessus de w. On a $z\overline{w} \in I\mathcal{E}_P$. D'après la proposition 6.1.2, 1-, il existe $\overline{v} \in I\mathcal{E}_P$ tel que $z\overline{w} = z\overline{v}$. On a donc $\overline{w} - \overline{v} \in (\mathcal{E}^{(1)})_P$, et si $\beta \in [(\mathcal{E}^{(1)})_y]_x$ est l'image de $\overline{w} - \overline{v}$, on a $\theta_x(\beta) = w$. Donc θ_x est surjectif.

L'isomorphisme $(\mathcal{E}/\mathcal{E}_1)_y \simeq \mathcal{E}_y/(\mathcal{E}_y)_1$ se démontre de la même façon. L'isomorphisme $(\mathcal{E}_1)_y \simeq (\mathcal{E}_y)_1$ se déduit aisément des deux précédents.

On déduit de ce qui précède et de [14], exposé IV, cor. 5.7, que $\mathcal{E}_1$ est plat sur Y.

Les cas $i > 1$ se démontrent à partir du cas $i = 1$ par récurrence sur i. $\square$

Le résultat suivant est une version relative de la proposition 5.1.1 :

6.1.4. Corollaire : *Soient X une variété algébrique affine intègre et $\mathcal{E}$ une famille de faisceaux quasi localement libres de type constant sur C_n paramétrée par X. Alors il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur $X \times C_n$ et un morphisme surjectif $\mathbb{E} \to \mathcal{E}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{E}_{|X\times C} \simeq \mathcal{E}_{|X\times C}$.*

Démonstration. Analogue à la démonstration de la proposition 5.1.1. On utilise le fait que $\mathcal{E}_{|C}$ est un fibré vectoriel sur $X \times C$ (d'après le corollaire 6.1.3), et que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X \times C_n$ on a $H^2(\mathcal{F}) = \{0\}$ (cf. le début de la démonstration du théorème 2.5.1). $\square$

6.1.5. Théorème : *Soit $\mathcal{E}$ une famille de faisceaux quasi localement libres de type constant sur des ouverts de C_n paramétrée par une variété intègre Y. Alors pour tout point fermé P de $Y \times C_n$ il existe un voisinage V de P dans U tel que*

$$\mathcal{E}_{|V} \;\simeq\; \bigoplus_{i=1}^{n} m_i.p_{C_n}^*(\mathcal{O}_i)_{|V}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n, le résultat étant évident si $n = 1$ (car Y est intègre). Supposons que le résultat est vrai pour $n - 1 \geq 1$. On fait maintenant une récurrence sur m_n. Si $m_n = 0$ le résultat est vrai car alors $\mathcal{E}$ est concentré sur $U \cap (Y \times C_{n-1})$. Supposons que $m_n > 0$ et que le résultat est vrai pour $m_n - 1$.

Posons $P = (y, x)$. Pour tout ouvert V de $Y \times C_n$ et tout $y' \in Y$, on note $V_{y'} = V \cap (\{y'\} \times C_n)$. On peut supposer que U est affine, que $\mathcal{E}_{y|U_y} \simeq \oplus_{i=1}^{n} m_i\mathcal{O}_{i|U_y}$ et que $\mathcal{L} = p_{C_n}^*(\mathcal{I}_C)$ est un fibré en droites trivial sur $Y \times C_{n-1}$. Soit $z \in H^0(\mathcal{L})$ une section engendrant $\mathcal{L}$. Soient $\sigma \in H^0(\mathcal{E}_y)$ défini par un élément non nul de $\mathbb{C}^{m_n}$ et $\overline{\sigma} \in H^0(\mathcal{E})$ un prolongement de σ. Alors $s = z^{n-1}\overline{\sigma} \in H^0(\mathcal{E}_{n-1})$. D'après le corollaire 6.1.3 $\mathcal{E}_{n-1}$ est un fibré vectoriel sur $Y \times C$, et $s_{|U_y} \in H^0((\mathcal{E}_y)_{n-1})$ ne s'annule en aucun point de U_y. Soit $V \in Y \times C$ l'ouvert des points où s ne s'annule pas. Soient $y' \in Y$, et $W \in V_{y'}$ un ouvert tel que $\mathcal{E}_{|W} \simeq \oplus_{i=1}^{n} m_i\mathcal{O}_{i|W}$. Le morphisme $\sigma_{|W} : \mathcal{O}_{n|W} \longrightarrow \mathcal{E}_W$ induit une section de $m_n\mathcal{O}_C$ qui ne s'annule en aucun point. Il en découle que

$$\operatorname{coker}(\sigma_{|W}) \;\simeq\; \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} m_i\mathcal{O}_{i|W}\right) \oplus (m_n - 1)\mathcal{O}_{n|W}.$$

Il découle du corollaire 5.7 de [14], exposé IV que $\mathcal{F} = \operatorname{coker}(\overline{\sigma}_{|V})$ est plat sur Y. C'est une famille de faisceaux quasi localement libres de type $(m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n - 1)$. D'après l'hypothèse de récurrence on peut, quitte à remplacer V par un voisinage plus petit de P, supposer que

$$\mathcal{F} \;\simeq\; \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} m_i p_{C_n}^*(\mathcal{O}_i)_{|V}\right) \oplus (m_n - 1)p_{C_n}^*(\mathcal{O}_{n|W})_{|V}.$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{E}_V \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} m_i p_{C_n}^*(\mathcal{O}_i)_{|V}\right) \oplus (m_n - 1)p_{C_n}^*(\mathcal{O}_{n|W})_{|V} \longrightarrow 0.$$

Mais on montre aisément, en utilisant les résolutions localement libres habituelles des $\mathcal{O}_i$ sur C_n, que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_V) = \{0\}$. On obtient donc finalement $\mathcal{E}_{|V} \simeq \bigoplus_{i=1}^n m_i.p_{C_n}^*(\mathcal{O}_i)_{|V}$. □

6.1.6. Remarque : Le théorème 6.1.5 n'est pas vrai si on ne suppose pas que Y est réduite. Supposons par exemple que Y soit une courbe multiple primitive de multiplicité $m > 0$, de courbe réduite associée C'. On considère le faisceau $\mathcal{E} = p_Y^*(\mathcal{O}'_C)$ sur $Y \times C_n$. C'est bien une famille plate de faisceau cohérents sur C_n paramétrée par Y, on a $\mathcal{E}_P \simeq \mathcal{O}_n$ pour tout point fermé P de Y. Mais la conclusion du théorème 6.1.5 est fausse pour cette famille de faisceaux.

6.1.7. Corollaire : *Soient X une variété algébrique affine intègre et $\mathcal{E}$ une famille de faisceaux quasi localement libres de type constant sur C_n paramétrée par X. Soient x un point fermé de X. Alors le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaiira-Spencer de $\mathcal{E}$ en x*

$$\omega_x : TX_x \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$$

est à valeurs dans le sous-espace $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_x))$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)$.

Démonstration. Pour tout point q de C, la déformation de $\mathcal{E}_{(x,q)}$ induite par $\mathcal{E}$ est triviale d'après la théorème 6.1.5. Il en découle que l'application composée

$$TX_x \xrightarrow{\omega_x} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x))$$

est nulle. Donc ω_x est à valeurs dans le noyau de l'application canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) \to H^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x)),$$

qui est $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_x))$. □

6.2. Irréductibilité

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur C_n. On dit que $\mathcal{P}$ est *irréductible* si pour tous $E_0, E_1 \in \mathcal{P}$ il existe une famille plate $\mathcal{E}$ de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par une variété algébrique lisse irréductible S telle que pour tout point fermé s de S on ait $\mathcal{E}_s \in \mathcal{P}$, et qu'il existe des points fermés $s_0, s_1 \in S$ tels que $\mathcal{E}_{s_0} \simeq E_0$ et $\mathcal{E}_{s_1} \simeq E_1$.

On peut faire une définition semblable concernant des morphismes de faisceaux cohérents sur C_n. On dit que deux morphismes $f : E \to F$, $f' : E' \to F'$ sont *isomorphes* s'il existe des isomorphismes $\epsilon : E \to E'$, $\phi : F \to F'$ tels que le carré

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon"] & F \arrow[d, "\phi"] \\ E' \arrow[r, "f'"] & F' \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de morphismes de faisceaux cohérents sur C_n. On dit que $\mathcal{S}$ est *irréductible* si pour tous f_0, f_1 dans $\mathcal{S}$ il existe des familles plates $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ de faisceaux cohérents sur C_n paramétrées par une variété algébrique lisse irréductible S, et un morphisme $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, tels que pour tout point fermé s de S le morphisme θ_s soit dans $\mathcal{S}$, et qu'il existe des points fermés s_0, s_1 de S tels que $\theta_{s_0} = f_0$ et $\theta_{s_1} = f_1$.

6.2.1. Théorème : *Soient r, d, $r_0, \ldots, r_{n-1}$, $d_0, \ldots, d_{n-1}$ des entiers, avec $r > \sum_{j=0}^{n-1} r_j$ et $r_i \geq 0$ pour $0 \leq i < n$.*

1 - Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux quasi-localement libres sur C_n de type complet $\big((r_0, \ldots, r_{n-1}), (d_0, \ldots, d_{n-1})\big)$ (cf. 3.1.2). Alors $\mathcal{P}$ est irréductible.

2 - Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de morphismes surjectifs $\mathbb{E} \to F$, où $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel algébrique de rang r et de degré d sur C_n et $F \in \mathcal{P}$. Alors $\mathcal{S}$ est irréductible.

Démonstration. Elle comporte deux étapes. On montre d'abord que l'irréductibilité de $\mathcal{P}$ entraine celle de $\mathcal{S}$. Puis on démontre le théorème par récurrence sur n.

Étape 1

Supposons que $\mathcal{P}$ soit irréductible.

Soient $f_0 : \mathbb{E}_0 \to F_0$, $f_1 : \mathbb{E}_1 \to F_1$ des morphismes de $\mathcal{S}$. Puisque $\mathcal{P}$ est irréductible il existe une famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux quasi localement libres sur C_n paramétrée par une variété algébrique lisse irréductible S, telle que pour tout point fermé s de S, $\mathcal{F}_s$ soit dans $\mathcal{P}$ et qu'il existe des points fermés s_0, s_1 de S tels que $\mathcal{F}_{s_0} \simeq F_0$, $\mathcal{F}_{s_1} \simeq F_1$.

Soit $\mathcal{O}(1)$ un fibré en droites très ample sur C_n. Si $m \gg 0$ les fibrés $\mathbb{E}_i(m)$ sont engendrés par leurs sections. Il existe donc des morphismes surjectifs

$$\phi_i : \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \longrightarrow \mathbb{E}_i.$$

Posons $\mathbb{D}_i = \ker(\phi_i)$, c'est un fibré en droites sur C_n. On a $\mathbb{D}_i \simeq \det(\mathbb{E}_i)^{-1} \otimes \mathcal{O}(-(r+1)m)$. Soit N_i le noyau du morphisme composé

$$\mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \xrightarrow{\phi_i} \mathbb{E}_i \xrightarrow{f_i} F_i \ .$$

Montrons que $h^1(N_i \otimes \mathbb{D}_i^{-1}) = 0$ si $m \gg 0$. D'après la proposition 5.1.1 il existe un fibré vectoriel $\mathbb{F}_i$ sur C_n et un morphisme surjectif

$$\alpha_i : \mathbb{F}_i \longrightarrow F_i$$

induisant un isomorphisme $\mathbb{F}_{i|C} \simeq F_{i|C}$. Soit $A_i = \ker(\alpha_i)$. Si $m \gg 0$ on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{O}(-m), A_i) = \{0\}$, donc il existe un morphisme

$$\beta_i : \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \longrightarrow \mathbb{F}_i \tag{3}$$

tel que $\alpha_i \circ \beta_i = f_i \circ \phi_i$, et β_i est surjectif (d'après la proposition 3.1.9). Soit

$$s = \mathrm{rg}(\mathbb{F}_i) = \mathrm{rg}(F_i) = \sum_{j=0}^{n-1} r_j.$$

Si $m \gg 0$, $\mathbb{F}_i(m)$ est engendré par ses sections, et $s+1$ parmi celles de (3) suffisent à l'engendrer. Il existe donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{B}_i \longrightarrow \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{s+1} \longrightarrow \mathbb{F}_i \longrightarrow 0,$$

où $\mathbb{B}_i$ est un fibré en droites sur C_n, $\mathbb{B}_i \simeq \det(\mathbb{F}_i)^{-1} \otimes \mathcal{O}(-(s+1)m)$. On a un diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{B}_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{s+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F}_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\beta_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F}_i \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r-s} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r-s} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

On a

$$\mathbb{D}_i^{-1}(-m) \simeq \det(\mathbb{E}_i) \otimes \mathcal{O}(rm), \quad \mathbb{B}_i \otimes \mathbb{D}_i^{-1} \simeq \det(\mathbb{E}_i) \otimes \det(\mathbb{F}_i)^{-1} \otimes \mathcal{O}((r-s)m),$$

et $r-s>0$, donc $h^1(\mathbb{D}_i^{-1}(-m)) = h^1(\mathbb{B}_i \otimes \mathbb{D}^{-1}) = 0$ si $m \gg 0$. On a donc $h^1(\ker(\beta_i) \otimes \mathbb{D}_i^{-1}) = 0$ d'après la colonne exacte de gauche du diagramme précédent. On utilise maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\beta_i) \longrightarrow N_i \longrightarrow \ker(\alpha_i) \longrightarrow 0.$$

Le faisceau $\ker(\alpha_i)$ ne dépend pas de m, donc $h^1(\ker(\alpha_i) \otimes \mathbb{D}_i^{-1}) = 0$ si $m \gg 0$, d'où $h^1(N_i \otimes \mathbb{D}_i^{-1}) = 0$.

On construit maintenant une famille de morphismes de $\mathcal{S}$ contenant f_0 et f_1. On peut supposer que m est assez grand pour que $h^1(\mathcal{F}_s(m)) = 0$ pour tout $s \in S$.

Soit U la variété des morphismes surjectifs

$$\mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{F}_s,$$

s parcourant S. C'est un ouvert d'un fibré vectoriel sur S (car $h^0(\mathcal{F}_s(m))$ est indépendant de s). Il existe un morphisme universel surjectif de fibrés sur $U \times C_n$

$$\rho : p_{C_n}^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^{r+1} \longrightarrow (\pi \times I_{C_n})^*(\mathcal{F}),$$

(π désignant la projection $U \to S$). Soit $\mathcal{N} = \ker(\rho)$, c'est une famille plate de faisceaux quasi localement libres sur C_n paramétrée par U.

Soit $k = \mathrm{Deg}(\mathbb{D}_i) = -d - (r+1)m\,\mathrm{Deg}(\mathcal{O}(-1))$. On utilise ici la variété $\Lambda^k(C_n)$ et le "fibré de Poincaré" $\mathcal{D}$ sur $\Lambda^k(C_n) \times C_n$ (cf. 2.6). Soit V la variété des morphismes $\mathcal{D}_y \to \mathcal{N}_u$, $y \in \Lambda^k(C_n)$, $u \in U$, tels que le composé $\mathcal{D}_y \to \mathcal{N}_u \subset \mathcal{O}(-m) \otimes \mathbb{C}^{r+1}$ soit un morphisme injectif de fibrés vectoriels, et que $h^1(\mathcal{D}_y^{-1} \otimes \mathcal{N}_u) = 0$. C'est un ouvert d'un fibré vectoriel sur $U \times \Lambda^k(C_n)$. On a un morphisme universel

$$\Theta : p_{\Lambda^k(C_n) \times C_n}^*(\mathcal{D}) \longrightarrow p_{C_n}^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^{r+1}.$$

Soit $\mathbb{E} = \operatorname{coker}(\Theta)$, c'est un fibré vectoriel sur $V \times C_n$. On a un morphisme canonique surjectif

$$\mathbb{E} \longrightarrow (\tau \times I_{C_n})^*(\mathcal{F}),$$

τ désignant la suite de projections $V \to U \to S$. C'est la famille de morphismes de $\mathcal{P}$ contenant f_0 et f_1.

Étape 2

On montre maintenant que si le théorème est vrai pour $n-1$, c'est-à-dire sur C_n, alors $\mathcal{P}$ est irréductible. Soient $F_0, F_1 \in \mathcal{P}$. D'après la proposition 5.1.1 il existe des fibrés vectoriels $\mathbb{F}_i$ sur C_n et des morphismes surjectifs $\phi_i : \mathbb{F}_i \to F_i$ induisant des isomorphismes $\mathbb{F}_{i|C} \simeq F_{i|C}$. Les faisceaux $\mathcal{N}_i = \ker(\phi_i)$ sont quasi localement libres de même type complet, d'après le corollaire 5.1.5, et leur support est contenu dans C_{n-1}. On considère maintenant les morphismes surjectifs de faisceaux sur C_{n-1}, induits par les transposés des ϕ_i

$$g_i : \mathbb{F}^\vee_{i|C_{n-1}} \longrightarrow \mathcal{N}_i^\vee.$$

D'après l'hypothèse de récurrence il existe des familles plates $\mathbb{G}$, $\mathcal{E}$ de faisceaux cohérents sur C_{n-1} paramétrées par une variété algébrique lisse irréductible S, et un morphisme surjectif $\gamma : \mathbb{G} \to \mathcal{F}$ tels que :

- $\mathbb{G}$ est localement libre.
- Les faisceaux $\mathcal{F}_s$, $s \in S$, sont de même type complet que $\mathcal{N}_0^\vee$, $\mathcal{N}_1^\vee$.
- Il existe des points fermés $s_0, s_1 \in S$ tels que $\gamma_{s_0} \simeq g_0$ et $\gamma_{s_1} \simeq g_1$.

D'après le théorème 2.5.1 il existe un prolongement de $\mathbb{G}$ en un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur C_n tel que $\mathbb{E}_{s_i} = \mathbb{F}_i^\vee$. On considère maintenant le morphisme composé surjectif de faisceaux sur C_n

$$\Theta : \mathbb{E} \twoheadrightarrow \mathbb{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{N}^\vee.$$

Soit $\mathcal{V} = \ker(\Theta)$. C'est une famille plate de faisceaux quasi-localement libres sur C_n de même type complet que $F_0^\vee, F_1^\vee$ (d'après la remarque 5.1.3). La famille contenant F_0, F_1 que l'on cherche est alors $\mathcal{V}^\vee$. □

6.3. Faisceaux quasi localement libres de type rigide

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent quasi localement libre sur C_n. Soient $a = [\frac{R(\mathcal{E})}{n}]$ et $k = R(\mathcal{E}) - an$. On a donc $R(\mathcal{E}) = an + k$. On dit que $\mathcal{E}$ est de *type rigide* s'il est localement libre si $k = 0$ et localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$ si $k > 0$. Si $k > 0$ cela revient dire que $\mathcal{E}$ est de type $(m_1, \ldots, m_n)$, avec $m_i = 0$ si $i \neq k, n$ et $m_k = 0$ ou 1.

6.3.1. Proposition : *Soient Y une variété algébrique intègre et $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par Y. Alors l'ensemble des points $y \in Y$ tels que $\mathcal{E}_y$ soit quasi localement libre de type rigide est un ouvert de Y.*

Démonstration. Soit R le rang généralisé des faisceaux $\mathcal{E}_y$, $R = an + k$, avec $a \geq 0$, $0 \leq k < n$. On supposera que $k > 0$ car le cas $k = 0$ (où quasi localement libre de type rigide équivaut à localement libre) est bien connu.

Soit $y_0 \in Y$ tel que $\mathcal{E}_{y_0}$ soit quasi localement libre de type rigide. On va montrer que $\mathcal{E}_y$ l'est aussi pour tout y dans un voisinage de y_0.

Soient $y \in Y$ et $P \in C$ tels qu'il existe un morphisme surjectif $\phi : (a+1)\mathcal{O}_{nP} \to \mathcal{E}_{yP}$. On peut prolonger ϕ en un morphisme surjectif $(a+1)\mathcal{O}_U \to \mathcal{E}_{|U}$, U désignant un voisinage convenable de (y, P). Les points (y, P) possédant cette propriété constituent donc un ouvert W de $Y \times C_n$.

Posons $M = \mathcal{E}_{yP}$. Soit

$$M_n = \{0\} \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = M$$

la première filtration canonique de M. Alors on a $\mathrm{rg}(M/M_1) \geq a+1$, car dans le cas contraire on aurait $R(M) \leq an$. Puisque ϕ induit un morphisme surjectif $\psi : (a+1)\mathcal{O}_{CP} \to M/M_1$, on a $\mathrm{rg}(M/M_1) = a+1$, et ψ est un isomorphisme. On a alors $\mathrm{rg}(M_i/M_{i+1}) = a+1$ pour $0 \leq i < k$ et $\mathrm{rg}(M_i/M_{i+1}) = a$ pour $k \leq i < n$. Puisque la multiplication par une équation de C induit des morphismes surjectifs $M/M_1 \to M_i/M_{i+1}$ on a $M_i/M_{i+1} \simeq (a+1)\mathcal{O}_{nP}$. Donc $\mathcal{E}_{yP}/(\mathcal{E}_{yP})_k$ est un $\mathcal{O}_{kP}$-module libre.

D'après le corollaire 6.1.3, en on point (y, P) de W, la fibre de $(\mathcal{E}_{|W})_k$ n'est autre que $(\mathcal{E}_{yP})_k$. Soit $V \subset W$ l'ouvert constitué des points (y, P) tels que $(\mathcal{E}_{yP})_k$ soit un $\mathcal{O}_{P,n-k}$-module libre. Soit $Z = (Y \times C_n)\backslash V$, et T sa projection sur Y, qui est une sous-variété fermée. L'ouvert $Y\backslash T$ est le voisinage recherché de y_0. □

6.3.2. *Déformations des faisceaux quasi localement libres de type rigide* - Soit $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur C_n. Soit $(\widetilde{\mathcal{E}}, S, s_0, \epsilon)$ une *déformation semi-universelle* de $\mathcal{E}$ (cf. [27], [9] 3.1), donc $\widetilde{\mathcal{E}}$ est une famille plate de faisceaux cohérents sur C_n paramétrée par S, s_0 est un point fermé de S et $\epsilon : \widetilde{\mathcal{E}}_{s_0} \simeq \mathcal{E}$. Le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\omega_{\widetilde{\mathcal{E}},s_0} : T_{s_0}S \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

est un isomorphisme. On pose

$$D_{reg}(\mathcal{E}) \ = \ \omega_{\widetilde{\mathcal{E}},s_0}(T_{s_0}(S_{red})).$$

Si $\mathcal{F}$ est une déformation de $\mathcal{E}$ paramétrée par une variété algébrique réduite Y, et si $\mathcal{F}_y \simeq \mathcal{E}$, l'image du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $\omega_{\mathcal{F},y}$ est contenue dans $D_{reg}(\mathcal{E})$.

On dit que $\mathcal{E}$ est *lisse pour les déformations réduites* si S_{red} est lisse en s_0.

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre de type rigide sur C_n, on a

$$D_{reg}(\mathcal{E}) \ \subset \ H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$$

d'après la proposition 6.3.1 et le corollaire 6.1.7.

6.3.3. Théorème : *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre de type rigide générique, alors on a $D_{reg}(\mathcal{E}) = H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour $n - 1 \geq 1$. On peut donc supposer que $D_{reg}(\mathcal{E}_1) = H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1))$ sur C_{n-1}. A partir d'une déformation complète de $\mathcal{E}_1$ (comme faisceau sur C_{n-1}) on va construire une déformation complète de $\mathcal{E}$ en utilisant les résultats de 3.5, puis montrer que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer de cette déformation en $\mathcal{E}$ a pour image $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$.

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}^{(1)}) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1) \longrightarrow 0,$$

d'où on déduit la suivante

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}^{(1)}) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1)) \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Soit $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux quasi localement libres sur C_{n-1}, de même type complet que $\mathcal{E}_1$, paramétrée par une variété intègre Y, telle qu'il existe $y_0 \in Y$ tel que $\mathcal{F}_{y_0} \simeq \mathcal{E}_1$ et que l'image du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $\omega_{\mathcal{F},y_0}$ soit $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1))$. On peut supposer que $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1))$ est minimal, donc $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_y))$ est constant au voisinage de y_0. En remplaçant Y par un voisinage de y_0 on peut donc supposer que

– $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_y)$ est indépendant de $y \in Y$,
– pour tout $y \in Y$, l'image de $\omega_{\mathcal{F},y}$ est $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_y)$.

Puisque $\mathcal{E}$ est quasi localement libre de type rigide on a $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) = 0$ ou bien c'est un fibré en droites, ce dernier cas ne pouvant se produire que si $\mathcal{E}_1$ est localement libre. Dans tous les cas on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{E}_{|C} \longrightarrow \mathcal{E}_{1|C} \otimes L^* \longrightarrow 0, \tag{5}$$

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E}_1)^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)} \longrightarrow \Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) \longrightarrow 0, \tag{6}$$

d'après le corollaire 3.1.8 et la proposition 3.1.4, (iv).

Étape 1 - *Paramétrisation des restrictions à C des déformations de $\mathcal{E}$*

On suppose que $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) \neq 0$, soit d son degré. On peut supposer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{1|C} \otimes L^*, \Gamma^{(0)}(\mathcal{E})))$ est minimal parmi les $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}_{y|C} \otimes L^*, D))$, $y \in Y$, $D \in \mathrm{Pic}^d(C)$. Soit W l'ouvert des points (y, D) de $Y \times \mathrm{Pic}^d(C)$ tels que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}_{y|C} \otimes L^*, D))$ soit minimal. Soit $\mathbb{W}$ le fibré relatif

$$\mathbb{W} = \mathcal{E}xt^1_p(p_Y^\sharp(\mathcal{F}_{|C} \otimes L^*), p_d^\sharp(\mathcal{D})),$$

p, p_Y, p_d désignant les projections $Y \times \mathrm{Pic}^d(C) \times C \to Y \times \mathrm{Pic}^d(C)$, $Y \times \mathrm{Pic}^d(C) \to Y$, $Y \times \mathrm{Pic}^d(C) \to \mathrm{Pic}^d(C)$ respectivement, et $\mathcal{D}$ un fibré de Poincaré sur $\mathrm{Pic}^d(C) \times C$. Il existe une *extension universelle* sur $\mathbb{W} \times C$

$$0 \longrightarrow {p'_d}^\sharp(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{V} \xrightarrow{\ \theta\ } {p'_Y}^\sharp(\mathcal{F}_{|C} \otimes L^*) \longrightarrow 0,$$

p'_d, p'_Y désignant les projections $\mathbb{W} \to Pic^d(C)$, $\mathbb{W} \to Y$ respectivement.

Si $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) = 0$ on prend $\mathbb{W} = Y$ et $\mathcal{V} = \mathcal{F}_{|C} \otimes L^*$, p'_Y désigne l'identité $\mathbb{W} \to Y$ et θ l'identité $\mathcal{V} \to p_Y^\sharp(\mathcal{F}_{|C} \otimes L^*)$.

On note w_0 le point de $\mathbb{W}$ correspondant à $\mathcal{E}$ (plus exactement correspondant à l'extension (5)). On a $p'_Y(w_0) = y_0$.

ÉTAPE 2 - *Paramétrisation des déformations de $\mathcal{E}$*

On peut supposer que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},(\mathcal{E}_1)^{(1)}))$ est minimal parmi les $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{V}_w,(\mathcal{F}_y)^{(1)}))$, $w\in\mathbb{W}$, $y=p'_Y(w)$. On peut supposer aussi que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}_C,\mathcal{E}_1))$ est minimal parmi les $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{V}_w,\mathcal{F}_y))$. Soit U l'ouvert de $\mathbb{W}$ où ces deux dimensions sont minimales. On considère le fibré relatif

$$\mathbb{U} \;=\; \mathcal{E}xt^1_{p_U}(\mathcal{V},{p'_Y}^\sharp(\mathcal{F})),$$

p_U désignant la projection $U\times C_n\to U$. On a un morphisme canonique

$$\tau:\mathbb{U}\longrightarrow p_{U*}(\mathcal{H}om(\mathcal{V}\otimes L,{p'_Y}^\sharp(\mathcal{F}_{|C}))$$

qui en $w\in U$, $y=p'_Y(w)$, est le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{V}_w,\mathcal{F}_y)\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_w\otimes L,\mathcal{F}_{y|C})$$

(cf. 3.5). On a une section canonique de ${p'_Y}^\sharp(\mathcal{F}_{|C})$ induite par θ. Soit $\mathbb{T}\subset{p'_Y}^\sharp(\mathcal{F}_{|C})$ la sous-variété correspondante (isomorphe à U).

La variété $Z=\tau^{-1}(\mathbb{T})$ est un fibré en espaces affines. On a une extension universelle sur $Z\times C_n$

$$0\longrightarrow q_Y^\sharp(\mathcal{F})\longrightarrow\mathbb{E}\longrightarrow q_U^\sharp(\mathcal{V})\longrightarrow 0,$$

q_Y, q_U désignant les projections $Z\to Y$ et $Z\to U$ respectivement. Soient $\sigma\in Z$ au dessus de $w\in U$, et $y=p'_Y(w)$. Alors, sur $\{\sigma\}\times C_n$, l'extension précédente est

$$0\longrightarrow\mathcal{F}_y\longrightarrow\mathbb{E}_\sigma\longrightarrow\mathcal{V}_w\longrightarrow 0$$

associée à $\sigma\in\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{V}_w,\mathcal{F}_y)$. L'image de σ dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{V}_w\otimes L,\mathcal{F}_{y|C})$ est θ_w.

On note z_0 le point de Z correspondant à $\mathcal{E}$ (ou plus exactement à l'extension $0\to\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}_{|C}\to 0$) .

ÉTAPE 3 - *Surjectivité de $\omega_{\mathbb{E},z_0}$*

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T_{e_0}Z \arrow[r, two heads, "Tq_Y"] \arrow[d, "\omega_{\mathbb{E},e_0}"] & T_{y_0}Y \arrow[d, "\omega_{\mathcal{F},y_0}"] \\ H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})) \arrow[r, two heads, "\rho"] & H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}_1)) \end{tikzcd}$$

Il en découle que $\rho\omega_{\mathbb{E},e_0}$ est surjectif. Il reste à voir que le morphisme induit par $\omega_{\mathbb{E},e_0}$

$$\nu:\ker(Tq_Y)\longrightarrow\ker(\rho)$$

est surjectif.

Supposons d'abord que $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})=0$. Dans ce cas on a

$$\ker(Tq_Y)\;=\;\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}^{(1)})$$

et un morphisme surjectif

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}^{(1)})\longrightarrow\ker(\rho)$$

d'après (4). Il suffit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}^{(1)}) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & T_{e_0}Z \arrow[d, "\omega_{\mathbb{E},e_0}"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}^{(1)}) \arrow[r, two heads] & H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ce sera fait dans l'étape 4.

Supposons maintenant que $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) \neq 0$. Soient $A = {p'_Y}^{-1}(y_0) \subset \mathbb{W}$ et $w_0 \in A$ correspondant à $\mathcal{E}_{|C}$ (on a donc $p'_Y(w_0) = y_0$).

Soit

$$\beta : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},(\mathcal{E}_1)^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\mathcal{E}_1) \twoheadrightarrow \ker(\rho)$$

le morphisme composé (cf. (4)). D'après la suite exacte (6) on a un morphisme surjectif

$$\psi : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \longrightarrow \ker(\rho)/\operatorname{im}(\beta).$$

Si $(\widetilde{\mathcal{E}}, S, s_0, \epsilon)$ est une déformation semi-universelle de $\mathcal{E}$, on a, en considérant le fibré en droites $\Gamma^{(0)}(\widetilde{\mathcal{E}})$ sur $S \times C$ (cf. corollaire 6.1.3) un morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}),\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}))$$

qui s'annule sur $\operatorname{im}(\beta)$. On obtient donc un morphisme canonique

$$\omega_0 : \ker(\rho)/\operatorname{im}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}),\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})).$$

On a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},(\mathcal{E}_1)^{(1)}) \xrightarrow{\gamma} \ker(Tq_Y) = T_\sigma(q_Y^{-1}(y_0)) \longrightarrow T_{w_0}A \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{1|C}\otimes L^*,\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \longrightarrow T_{w_0}A \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}),\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \longrightarrow 0,$$

et comme dans le cas $\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}) = 0$ un diagramme commutatif

(7)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},(\mathcal{E}_1)^{(1)}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & \ker(Tq_Y) \arrow[d, "\omega_{\mathbb{E},e_0}"] \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},(\mathcal{E}_1)^{(1)}) \arrow[r, "\beta"] & \ker(\rho).
\end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer la surjectivité du morphisme $\theta : T_{w_0}A \to \ker(\rho)/\operatorname{im}(\beta)$ induit par $\omega_{\mathbb{E},e_0}$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{1|C}\otimes L^*,\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \arrow[r, hook] \arrow[dd, equal] & T_{w_0}A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\theta"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}),\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \arrow[dd, equal] \\
& \ker(\rho)/\operatorname{im}(\beta) \arrow[ur, "\omega_0"] & \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{1|C}\otimes L^*,\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C},\Gamma^{(0)}(\mathcal{E})) \arrow[r, two heads] \arrow[u, two heads, "\psi"] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}),\Gamma^{(0)}(\mathcal{E}))
\end{tikzcd}$$

(voir étape 4). La surjectivité de θ en découle aisément.

Étape 4 - *Commutativité des diagrammes*

On ne démontrera que la commutativité du diagramme (7), les autres cas étant analogues. Rappelons que $z_0 \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}_1)$ désigne l'élément associé à l'extension $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{|C} \to 0$. Soit

$$\alpha \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}_{|C}, (\mathcal{E}_1)^{(1)}) \subset \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_{|C}, \mathcal{E}_1).$$

Soit $\mathcal{G}$ la famille plate de faisceaux quasi localement libres sur C_n paramétrée par $\mathbb{C}$ définie par : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{G}_\lambda \to \mathcal{E}_{|C} \to 0$ est l'extension associée à $z_0 + \lambda\alpha$. On considère le morphisme de déformation infinitésimale de Koadaïra-Spencer de cette famille en $\lambda = 0$:

$$\omega_{\mathcal{G},0} : \mathbb{C} \longrightarrow H^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})).$$

Il suffit de montrer que $\omega_{\mathcal{G},0}(1)$ est égal à l'image de α dans $H^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$. On utilisera les résultats de 2.4. Soient $\phi : \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \to \mathbb{C}$ le morphisme induit par le quotient $\mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]/(t^2)$ et $\pi : \mathrm{spec}(\mathbb{C}[t]/(t^2)) \times C_n \to C_n$ la projection. Alors le faisceau $\pi_*(\phi^\sharp(\mathcal{G}))$ est une extension de $\mathcal{E}$ par lui-même, et $\omega_{\mathcal{G},0}(1)$ n'est autre que l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ associé à cette extension.(cf. [9], 3-).

Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de C tel que α soit représenté par un cocycle (α_{ij}), $\alpha_{ij} : \mathcal{E}_{|C|U_{ij}} \to (\mathcal{E}_1)^{(1)}_{|U_{ij}}$. D'après la proposition 2.4.3, $\mathcal{G}_\lambda$ est obtenu en recollant les $\mathcal{E}_{|U_{ij}}$ au moyen des automorphismes $I + \lambda\tau_{ij}$ de $\mathcal{E}_{|U_{ij}}$, τ_{ij} étant le composé

$$\mathcal{E}_{|U_{ij}} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_{|C|U_{ij}} \xrightarrow{\alpha_{ij}} (\mathcal{E}_1)^{(1)}_{|U_{ij}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{1|U_{ij}} \hookrightarrow \mathcal{E}_{|U_{ij}}.$$

Donc $\mathcal{G}$ est obtenu en recollant les $\pi^*(\mathcal{E})_{|\mathbb{C}\times U_{ij}}$ au moyen des automorphismes $I + t\tau_{ij}$ (avec $t = I_{\mathbb{C}}$). Il en découle que $\pi_*(\phi^\sharp(\mathcal{G}))$ est obtenu en recollant les $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})_{|U_{ij}}$ au moyen des automorphismes $\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la proposition 2.4.3, l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ associé à l'extension de $\mathcal{E}$ par lui-même obtenue ainsi n'est autre que l'image de α. □

6.3.4. Corollaire : *Si $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi localement libre de type rigide tel que* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{E}))$ *soit minimal, c'est à-dire soit tel que pour tout faisceau quasi localement libre $\mathcal{F}$ de même type complet que $\mathcal{E}$ on ait* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{F})) \geq \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}(\mathcal{E}))$, *alors on a* $D_{reg}(\mathcal{E}) = H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$ *, et $\mathcal{E}$ est lisse pour les déformations réduites.*

Démonstration. Soit $d = \dim_{\mathbb{C}}(H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E})))$. Soit $(\widetilde{\mathcal{E}}, S, s_0, \epsilon)$ une déformation semi-universelle de $\mathcal{E}$. Alors, si $\mathcal{E}$ est générique, d'après le théorème 6.3.3, l'espace tangent de S_{red} en s_0 est $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$ et S est lisse en s_0. Donc dans tous les cas la dimension de S_{red} est aussi égale à d. Puisque l'espace tangent $T_{s_0}S_{red}$ est de dimension au moins d et est contenu dans $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}))$, il lui est égal et le corollaire 6.3.4 en découle. □

6.4. Faisceaux quasi localement libres de type rigide stables

La notion de (semi-)stabilité des faisceaux cohérents sur C_n est indépendante du choix d'un fibré en droites ample sur C_n (cf. [7]). Un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur C_n est dit *semi-stable* (resp. stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ on a $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$ (resp. $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$) .

Soient R, D des entiers, avec $R \geq 1$. On note $\mathcal{M}(R, D)$ la variété de modules des faisceaux stables de rang généralisé R et de degré généralisé D sur C_n (cf. [22], [23], [26]). On supposera que $\deg(L) < 0$, car dans le cas contraire les seuls faisceaux sans torsion stables sur C_n sont les fibrés vectoriels stables sur C.

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau quasi localement libre de type rigide. Il existe donc des entiers $a = a(\mathcal{E}), k = k(\mathcal{E})$ tels que $a, k > 0$, $k < n$, et que $\mathcal{E}$ soit localement isomorphe à $a\mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_k$. Posons

$$E = \mathcal{E}_{|C}, \qquad F = G_k(\mathcal{E}) \otimes L^{-k}.$$

Alors on a $\mathrm{rg}(E) = a + 1$, $\mathrm{rg}(F) = a$), et

$$(G_0(\mathcal{E}), G_1(\mathcal{E}), \ldots, G_{n-1}(\mathcal{E})) \ = \ (E, E \otimes L, \ldots, E \otimes L^{k-1}, F \otimes L^k, \ldots, F \otimes L^{n-1}) \ .$$

Donc

$$\mathrm{Deg}(\mathcal{E}) \ = \ k \deg(E) + (n-k) \deg(F) + \big(n(n-1)a + k(k-1)\big) \deg(L)/2 \ .$$

Posons $\delta = \delta(\mathcal{E}) = \deg(F)$, $\epsilon = \epsilon(\mathcal{E}) = \deg(E)$. D'après la proposition 6.3.1 les déformations de $\mathcal{E}$ sont des faisceaux quasi localement libres de type rigide, et d'après le corollaire 6.1.3, $a(\mathcal{E})$, $k(\mathcal{E})$, $\delta(\mathcal{E})$ et $\epsilon(\mathcal{E})$ sont aussi invariants par déformation. Soient

$$R = an + k \ , \qquad D = k\epsilon + (n-k)\delta + \big(n(n-1)a + k(k-1)\big) \deg(L)/2 \ .$$

Les faisceaux quasi localement libres de type rigide stables $\mathcal{F}$ tels que $a(\mathcal{F}) = a$, $k(\mathcal{F}) = k$, $\delta(\mathcal{F}) = \delta$, $\epsilon(\mathcal{F}) = \epsilon$ constituent donc un ouvert de $\mathcal{M}(R, D)$, noté $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)$.

6.4.1. Proposition : *La variété $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)$ est irréductible, et la sous-variété réduite sous-jacente $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$ est lisse. Si cette variété est non vide, on a*

$$\dim(\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)) \ = \ 1 - \Big(\frac{n(n-1)}{2}a^2 + k(n-1)a + \frac{k(k-1)}{2}\Big) \deg(L) + (g-1)(na^2 + k(2a+1))$$

(g désignant le genre de C). Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$, l'espace tangent de $\mathcal{N}(a, k, \delta, \epsilon)_{red}$ en $\mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à $H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}))$.

Démonstration. Cela découle du fait que tout faisceau stable sur C_n est simple, du corollaire 6.3.4 et de la proposition 3.4.4. $\square$

Références

[1] Bănică, C., Forster, O. *Multiple structures on space curves.* In Contemporary Mathematics 58, Proc. of Lefschetz Centennial Conf. (1986), AMS, 47-64.

[2] Bayer, D., Eisenbud, D. *Ribbons and their canonical embeddings.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 719-756.

[3] Bhosle Usha N. *Generalized parabolic bundles and applications to torsion free sheaves on nodal curves.* Arkiv for Matematik 30 (1992), 187-215.

[4] Bhosle Usha N. *Picard groups of the moduli spaces of vector bundles.* Math. Ann. 314 (1999) 245-263.

[5] Danila, G. *Sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif.* Ann. Inst. Fourier 50,5 (2000), 1323-1374.

[6] Drézet, J.-M. *Variétés de modules alternatives.* Ann. de l'Inst. Fourier 49 (1999), 57-139.

[7] Drézet, J.-M. *Faisceaux cohérents sur les courbes multiples* . Collect. Math. 57, 2 (2006), 121-171.

[8] Drézet, J.-M. *Paramétrisation des courbes multiples primitives* Preprint (2006), math.AG/0605726.

[9] Drézet, J.-M. *Déformations des extensions larges de faisceaux* . Pacific Journ. of Math. 220, 2 (2005), 201-297

[10] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[11] Eisenbud, D., Green, M. *Clifford indices of ribbons.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 347, 3 (1995), 757-765.

[12] Godement, R. *Théorie des faisceaux.* Actualités scientifiques et industrielles 1252, Hermann, Paris (1964).

[13] González, M. *Smoothing of ribbons over curves.* Journ. für die reine und angew. Math. 591 (2006), 201-235.

[14] Grothendieck, A. et al. SGA1. *Revêtements Etales et Groupe Fondamental.* SGA1. Lect. Notes in Math. 224. Springer-Verlag (1971).

[15] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* GTM 52, Springer-Verlag (1977).

[16] Huybrechts, D., Lehn, M. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves.* Aspect of Math. E31, Vieweg (1997).

[17] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on some nonreduced projective schemes.* Journ. of Alg. Geom. 13 (2004), 1-27.

[18] Inaba, M.-A. *On the moduli of stable sheaves on a reducible projective scheme and examples on a reducible quadric surface.* Nagoya Math. J. (2002), 135-181.

[19] Kleiman, S.L. *The Picard scheme.* Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained. Mathematical Surveys and Monographs, 123. A.M.S., Providence, RI, (2005), 235-321.

[20] Le Potier, J. *Systèmes cohérents et structures de niveau.* Astérisque 214 (1993).

[21] Le Potier, J. *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif.* Revue roumaine de math. pures et appliquées 38 (1993), 635-678.

[22] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves I.* J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 91-126.

[23] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 577-614.

[24] Maruyama, M., Trautmann, G. *Limits of instantons.* Intern. Journ. of Math. 3 (1992), 213-276.

[25] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[26] Simpson, C.T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety I.* Publ. Math. IHES 79 (1994), 47-129.

[27] Siu Y., Trautmann, G. *Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol. 29, N. 238 (1981).

[28] Sun, X. *Degeneration of moduli spaces and generalized theta functions.* Journ. of Alg. Geom. 9 (2000), 459-527.

[29] Sun X., *Degeneration of SL(n)-bundles on a reducible curve.* Proc. of Algebraic Geometry in East Asia (Japan, 2001) and math.AG/0112072.

[30] Teixidor i Bigas, M. *Moduli spaces of (semi-)stable vector bundles on tree-like curves.* Math. Ann. 290 (1191), 341-348.

[31] Teixidor i Bigas, M. *Moduli spaces of vector bundles on reducible curves.* Amer. J. of Math. 117 (1995), 125-139.

[32] Teixidor i Bigas, M. *Compactifications of moduli spaces of (semi)stable bundles on singular curves: two points of view. Dedicated to the memory of Fernando Serrano.* Collect. Math. 49 (1998), 527-548.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr

URL: http://www.math.jussieu.fr/∼drezet